

1. (书写) 通过计算说明 $f(x) = \log \log(1 + \frac{1}{|x|}) \in W^{1,2}(B)$ 但不是 $L^\infty(B)$ 的函数。这里 $B = \{|x| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$, 是单位圆面。

2. (书写) 考虑一下 1 维的泊松方程。

$$(0.1) \quad \begin{cases} -\partial_{xx}u = f, & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

证明 $\|u\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{8}\|f\|_{L^\infty}$ 。(提示: 考虑 $v(x) := u(x) + \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})^2\|f\|_{L^\infty}$, 对其用极大值原理。)

3. (编程, 可附代码或直接书面写结果) 用有限差分方法计算以下条件的泊松方程:

$$(0.2) \quad \begin{cases} -\partial_{xx}u = \cos(\pi x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = \frac{1}{\pi^2}, \quad u'(1) = 0. \end{cases}$$

猜出其精确解, 并给出 $h = 1/8$ 时的 H^1 误差。