

二维环面上的 Allen-Cahn 方程定义如下:

$$(AC) \quad \begin{cases} \partial_t u = \Delta u - \frac{1}{\epsilon^2} f(u), & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{T}^2 \\ u(0, x) = u_0 \end{cases},$$

其中 $f(u) = u^3 - u$, $\mathbb{T}^2 = [0, 2\pi)^2$.

1. (编程) 假设初始条件给定如下:

$$\tanh \frac{\sqrt{(x - \pi)^2 + (y - \pi)^2} - 2}{\epsilon\sqrt{2}}$$

试用 Backward Euler 方法求解:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = \Delta u_{n+1} - \frac{1}{\epsilon^2} f(u_{n+1}),$$

选取 $\epsilon = 0.01, 0.1, 1$ 时, 画出对应 $T = 0, 50, 100$ 的图。你选取的时间步长为多少? 猜测满足稳定性要求的时间步长 τ 和 ϵ 的关系。

2. (编程) 选取以下的初始条件

$$(0.1) \quad u_0(x, y) = -1 + \sum_{i=1}^7 f_0 \left(\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} - r_i \right),$$

其中

$$f_0(s) = \begin{cases} 2e^{-\frac{\epsilon^2}{s^2}}, & s < 0; \\ 0, & s \geq 0. \end{cases}$$

球的中心坐标和半径长度如下表: 试用 Semi-implicit 格式计算满足此初始条件的 Allen-Cahn

x_i	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
y_i	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
r_i	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{15}$	$\frac{2\pi}{15}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$

表 0.1. 中心坐标及半径长度

方程, 取 $\epsilon = 0.1$, 以及合适的 τ 画出 $T = 0, 5, 15$ 时对应的解。

3. (编程) 二维环面上的 Cahn-Hilliard 方程定义如下:

$$(AC) \quad \begin{cases} \partial_t u = -\Delta(\Delta u - \frac{1}{\epsilon^2} f(u)), & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{T}^2 \\ u(0, x) = u_0 \end{cases},$$

其中 $f(u) = u^3 - u$, $\mathbb{T}^2 = [0, 2\pi)^2$. 试用 Semi-implicit 格式计算满足第 2 题中初始条件的 Cahn-Hilliard 方程, 取 $\epsilon = 0.1$, 以及合适的 τ 画出 $T = 0, 5, 15$ 时对应的解。比较与第 2 题中解的动力学表现。