高等代数 II 习题课练习题

第一次：2023.2.27

1. 已知 $f(x)$, $g(x)$, 试求 $q(x)$ 及 $r(x)$, 使得

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

且 $\deg r(x)<\deg g(x)$:

(i) $f(x)=x^4-4x^3-1$, $g(x)=x^2-3x+2$;

(ii) $f(x)=x^5-x^3+3x^2-1$, $g(x)=x^3-3x+2$.

解 (i) $q(x)=x^2-x-5$, $r(x)=-13x+9$,(ii) $q(x)=x^2+2$, $r(x)=x^2+6x-5$.

2. 实数 m, p, q 满足什么条件时多项式 x^2+mx+1 能够整除 x^4+px+q?

解: $p=m^2-2m$, $q=m^2-1$.

3. 计算 $f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3$ 与 $g(x)=3x^3+10x^2+2x-3$ 的最大公因式.

解：$(f(x),g(x))=x+3$.

4. 设 $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$, $g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$ 都是有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的多项式，求 $u(x)$, $v(x)\in\mathbb{Q}[x]$, 使得

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=(f(x),g(x)).$$

解：$u(x)=-(x+1)$,$v(x)=x+2$

5. 设 $2x^3-x^2+3x-5=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$, 求 a, b, c, d. 解：$a=2$, $b=11$,$c=23$,$d=13$.

6. 证明：数域 $\mathbb{K}$ 上的一个 n 次多项式 $f(x)$ 能被它的导数整除的充分必要条件是 $f(x)=a(x-b)^n$, 这里 a, b 是 $\mathbb{K}$ 中的数.

证充分性. 依题设 $f(x)=a(x-b)^n, a\neq 0, n>0$. 于是 $f'(x)=na(x-b)^{n-1}$, 所以 $f'(x)\mid f(x)$. 必要性. 对 $f(x)$ 作典型分解, 设

$$f(x)=ap_1^{m_1}(x)p_2^{m_2}(x)\cdots p_i^{m_t}(x),$$

其中 $p_i(x)$ 都是不可约因式, 则

$$f'(x)=p_1^{m_2-1}(x)p_2^{m_2-1}(x)\cdots p_t^{m_1-1}(x)\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ 与 $p_i(x)(1\leqslant i\leqslant t)$ 互素. 由 $f'(x)\mid f(x)$, 知 $\varphi(x)=c$ (常数). 但

$$\deg(f(x))=\deg\left(f'(x)\right)+1$$

故 $t=1$, 且 $\deg\left(p_1(x)\right)=n$, 即

$$f(x)=a(x-b)^n.$$

7. 证明有理系数多项式

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

没有重因式.

证: 因 $f'(x)=1+x+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$,

$$f(x)=f'(x)+\frac{x^n}{n!}$$

设 $h(x)\mid f(x)$ 且 $h(x)\mid f'(x)$, 则

$$h(x)\mid \big(f(x)-f'(x)\big)$$

即

$$h(x)\mid \frac{x^n}{n!},$$

故 $h(x)=cx^k(c\neq 0,k=0,1,2,\cdots,n)$. 但显然 $cx^*(1\leqslant k\leqslant n)$ 都不是 $f(x)$ 的因式, 只能 $k=0$. 于是

$$\big(f(x),f'(x)\big)=1$$

$f(x)$ 没有重因式.

8. 令 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $\mathbb{K}[x]$ 的多项式，而 a, b, c, d 是 $\mathbb{K}$ 中的数，并且 $ad-bc\neq 0$, 证明：

$$(af(x)+bg(x),cf(x)+dg(x))=(f(x),g(x)).$$

证：设 $f_1(x)=af(x)+bg(x),\quad g_1(x)=cf(x)+dg(x)$ ，由于 $\quad d(x)|f(x),d(x)|g(x)$, 从而 $d(x)\,|f_1(x),d(x)|\,g_1(x)$, 即 $d(x)$ 是 $f_1(x),g_1(x)$ 的一个公因式. 再设 $\varphi(x)$ 是 $f_1(x),g_1(x)$ 的任一公因式, 则

$$\varphi(x)\,|f_1(x),\varphi(x)|\,g_1(x).$$

由 $f_1(x),g_1(x)$ 的假设及 $ad-bc\neq 0$, 可解得

$$f(x)=\frac{d}{ad-bc}f_1(x)-\frac{b}{ad-bc}g_1(x),$$
$$g(x)=\frac{-c}{ad-bc}f_1(x)+\frac{a}{ad-bc}g_1(x),$$

从而知 $\varphi(x)|f(x),\varphi(x)|g(x)$, 即 $\varphi(x)$ 也是 $f(x),g(x)$ 的一个公因式, 所以 $\varphi(x)\mid d(x)$. 由定义知 $d(x)=(f_1(x),g_1(x))$, 于是 $\quad (af(x)+bg(x),cf(x)+dg(x))=(f(x),g(x))$.

9. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^{3m}+A+I_n=O$, 其中 m 为正整数，求证： A^2+A+I_n 是非异阵，并求其逆阵.

证明：设 $f(x)=x^{3m}+x+1$, $g(x)=x^2+x+1$, $f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x)$, 其中 $q_1(x)=x^{3m-2}-x^{3m-3}+x^{3m-5}-x^{3m-6}+\cdots+x-1$, $r_1(x)=x+2$. $g(x)=r_1(x)q_2(x)+r_2(x)$, 其中 $q_2(x)=x-1$, $r_2(x)=3$, 由上述可得

$$r_2(x)=g(x)-r_1(x)q_2(x)=g(x)-(f(x)-g(x)q_1(x))q_2(x)=(1+q_1(x)q_2(x))g(x)-q_2(x)f(x)$$

所以 $(f(x),g(x))=1$, 将 $x=A$ 代入上式，得 A^2+A+I_n 的逆矩阵为 $\frac{(1+q_1(A)q_2(A))}{3}=\frac{1}{3}(1+\sum_{k=1}^{m}(A^{3k-1}-2A^{3k-2}+A^{3k-3}))$.

10. 设循环矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

是非异阵，求证： A^{-1} 也是循环矩阵.

证明: 设 $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, 简单证明可知

$$J^k=\begin{pmatrix} 0 & I_{n-k} \\ I_k & 0 \end{pmatrix},(1\le k\le n),$$

设 $f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_nx^{n-1}$, $g(x)=x^n-1$, 由白皮书例 2.56 可知 $1=(f(x),g(x))$, 则存在 $u(x),v(x)$ $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$, 将 $x=J$ 代入，得 $f(J)u(J)+g(J)v(J)=I$, $g(J)=O$, 所以 $f(J)u(J)=I$, $f(J)=A$, $A^{-1}=u(J)$, 所以 A^{-1} 是循环矩阵.