1. 求出正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵:

(i) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$; (ii) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&4&3\\4&5&3\\3&3&2\end{pmatrix}$; (iii) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&0&-6\\0&1&0\\-6&0&9\end{pmatrix}$.

解: (i) $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1\\1&\frac{1}{2}&-2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$,

(ii) $T_1=\frac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix}\sqrt{11}&3&\sqrt{2}\\-\sqrt{11}&3&\sqrt{2}\\0&2&-3\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $P'AP=\begin{pmatrix}1&&\\&11&\\&&0\end{pmatrix}$,

(iii) $\boldsymbol{P}=\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}0&2&3\\\sqrt{13}&0&0\\0&-3&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}P=\begin{pmatrix}1&&\\&13&\\&&0\end{pmatrix}$.

2. 设二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$ 通过正交变换化为 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$, 求 a 和所用的正交变换.

解由题设二次型 f 的矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&&\\&3&a\\&a&3\end{pmatrix}$ 相似于 $\operatorname{diag}(1,2,5)$, 所以它的特征多项式为 $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5)$. 而 $|\lambda E-A|=(\lambda-2)\left(\lambda^2-6\lambda+9-a^2\right)$, 即是说

$$(\lambda-2)\left(\lambda^2-6\lambda+9-a^2\right)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5)$$

故得 $9-a^2=5$, 即 $a=2$ (因题设 $a>0$). 再对 $A=\begin{pmatrix}2&&\\&3&2\\&2&3\end{pmatrix}$ 的特征值 $1,2,5$ 分别求得特征向量:

$$\alpha_1=(0,1,-1)',\quad \alpha_2=(1,0,0)',\quad a_1=(0,1,1)'.$$

它们已是正交的, 只需单位化:

$$\beta_1=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad \beta_2=(1,0,0)',\quad \beta_1=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

故 $[x_1,x_2,x_3]'=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)[y_1,y_2,y_3]'$.

3. 设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ 及 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_k$ 是欧氏空间 V 中两组向量. 证明: 存在 V 上的正交变换 φ, 使

$$\varphi\left(\boldsymbol{x}_i\right)=\boldsymbol{y}_i(i=1,2,\cdots,k)$$

成立的充分必要条件是这两组向量的 Gram 矩阵相等.

证明：首先证明必要性，对任意的 $1\le i\le k$, $1\le j\le k$, 有 $(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)=(\varphi(\boldsymbol{x}_i),\varphi(\boldsymbol{x}_j))=(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{y}_j)$, 则两组向量 Gram 矩阵相等. 充分性: 它们的 Gram 矩阵相同, 任取 $\alpha,\beta\in V$, 设它们

在基 $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ 下的坐标向量分别为 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$, 则 $\varphi(\alpha), \varphi(\beta)$ 在基 $\{y_1, y_2, \cdots, y_k\}$ 下的坐标向量也分别为 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$, 于是

$$(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = f' G\left(x_1, x_2, \cdots, x_k\right) g = f' G\left(y_1, y_2, \cdots, y_k\right) g = (\alpha, \beta)$$

4. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 n 阶实方阵满足 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}$, 求证存在正交矩阵 $\boldsymbol{O}$ 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}\boldsymbol{A}$.

证明: 用极分解: 设 $A = O_1 P, B = O_2 Q$, 这里 O_1, O_2 是正交矩阵, P, Q 是半正定矩阵, 那么 $A'A = P'P = P^2 = Q^2 = B'B$, 从而根据平方根的唯一性知道 $P = Q$. 所以 $B = \left(O_2 O_1^{-1}\right) A$.

5. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶实正交方阵, 证明: $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$ 当且仅当 $n - r(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})$ 为偶数.

证明: 考察正交矩阵 $C = AB^{-1}$, 那么 $\operatorname{rank}(A + B) = \operatorname{rank}(C + I)$, 而且 $n - \operatorname{rank}(C + I)$ 就是 C 的特征值中 -1 的个数. 所以 C 是第一类的当且仅当 C 的特征值中 -1 的个数为偶数.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是欧式空间 V 上的正交变换, 且 $\det \boldsymbol{A} = 1$. 求证存在 V 上的正交变换 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^2$.

证明: 首先存在一组标准正交基使得 A 在这组基下的矩阵形如注意由于 $\det A = 1$, 所以 A 的特征值中 -1 的个数是偶数, 所以可以把特征值中的-1 两两组合使得 A 成为上面的形状. 现在根据旋转的几何直观不难有

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}^2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}^2$$

只要令 $B = \operatorname{diag}\{\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, 1, \cdots, 1\}$

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称阵, 证明: $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同特征值的充要条件是, 对 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 λ_0 及对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} - \lambda_0 I_n & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}' & 0 \end{pmatrix}$$

均非异.

证明: 设 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 使的 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \operatorname{diag}\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, 其中 $\lambda_1 = \lambda_0$, 正交矩阵的第一列可取为单位特征向量 $\alpha/\|\alpha\|$. 于是 $Pe_1 = \alpha/\|\alpha\|$, 即 $P'\alpha = \|\alpha\| e_1 = (\|\alpha\|, 0, \cdots, 0)'$. 考虑如下正交相似变换:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}' & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} - \lambda_0 I_n & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}'\left(\boldsymbol{A} - \lambda_0 \boldsymbol{I}_n\right)\boldsymbol{P} & \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{P} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & & & & \|\boldsymbol{\alpha}\| \\ & \lambda_2 - \lambda_0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_n - \lambda_0 & \\ \|\boldsymbol{\alpha}\| & & & & 0 \end{pmatrix},$$

最后一个矩阵空白处均为 0 . 两边取行列式即得 $\begin{vmatrix} A-\lambda_0 I_n & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}' & 0 \end{vmatrix} = -\|\boldsymbol{\alpha}\|^2(\lambda_2-\lambda_0)\cdots(\lambda_n-\lambda_0)$, 由此即得充要条件.

8. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶正定实对称阵, 证明:

$$\frac{2^{n+1}}{|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|} \leq \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}+\frac{1}{|\boldsymbol{B}|}$$

且等号成立的充分必要条件为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

证明: 注意到问题的条件和结论在同时合同变换 $A\mapsto C'AC, B\mapsto C'BC$ 下不改变, 故由例 9.75 不妨从一开始就假设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n, \boldsymbol{B}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$, 其中 $\lambda_i>0$. 由基本不等式可得

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}+\frac{1}{|\boldsymbol{B}|}\right)=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)\cdot\left(1+\frac{1}{\lambda_1\cdots\lambda_n}\right)\geq 2^n\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\lambda_i}\cdot\frac{2}{\sqrt{\lambda_1\cdots\lambda_n}}=2^{n+1}$$

等号成立当且仅当所有的 $\lambda_i=1$, 即当且仅当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

9. 求证 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$.

证明: 两边求迹:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_{ji}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2$$

两边乘以 2:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}2a_{ij}a_{ji}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}2a_{ij}^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2+a_{ji}^2$$

变形:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-a_{ji})^2=0$$

从而 $a_{ij}=a_{ji}$, 即 A 对称. 或者也可以利用 $\operatorname{tr}(A-A')(A-A')'\geqslant 0$ 且等号成立当且仅当 $A=A'$.

10. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为 n 阶实对称阵, 请用实对称阵的正交相似标准型理论证明:

$$\operatorname{tr}\left((\boldsymbol{ABC})^2\right)\leq\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^2\boldsymbol{B}\right),$$

并求等号成立的充分必要条件.

证明: 设 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵, 使得 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{AP}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ 为正交相似标准型. 考虑到问题的条件和结论在同时正交相似变换 $A\mapsto P'AP, B\mapsto P'BP, C\mapsto P'CP$ 下不改变, 故不妨从一开始就假设 $\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ 为对角阵. 设 $\boldsymbol{BC}=(b_{ij})$, 则 $\boldsymbol{ABC}=(\lambda_i b_{ij})$, 于是

$$\operatorname{tr}\left((ABC)^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\lambda_i b_{ij})(\lambda_j b_{ji})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 b_{ii}^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\lambda_i\lambda_j b_{ij}b_{ji}$$

又 $\boldsymbol{BC}^2\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{BC})(\boldsymbol{BC})'=(\sum_{k=1}^{n}b_{ik}b_{jk})$, 故 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{BC}^2\boldsymbol{B}=(\lambda_i^2\sum_{k=1}^{n}b_{ik}b_{jk})$, 于是

$$\operatorname{tr}\left(A^2BC^2B\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_i^2 b_{ik}^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 b_{ii}^2+\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\lambda_i^2 b_{ij}^2+\lambda_j^2 b_{ji}^2\right)$$

因此

$$\operatorname{tr}\left(A^2BC^2B\right)-\operatorname{tr}\left((ABC)^2\right)=\sum_{1\le i<j\le n}\left(\lambda_i b_{ij}-\lambda_j b_{ji}\right)^2\ge 0$$

等号成立当且仅当 $\lambda_i b_{ij}=\lambda_j b_{ji}(1\le i<j\le n)$, 这当且仅当 $\lambda_i b_{ij}=\lambda_j b_{ji}(1\le i,j\le n$ ，这也当且仅当 $ABC=CBA=(ABC)'$, 即当且仅当 ABC 为对称阵. 另外, 也可利用高代白皮书例 2.49 给出一个简洁的证明.