1. 请用多元多项式的整性证明: 数域 $\mathbb{K}$ 上的 $n$ 阶方阵全体构成的线性空间 $M_n(\mathbb{K})$ 有一组 (无穷组) 由非异矩阵构成的基.

证：设 $n^2$ 个矩阵为

$$\boldsymbol{X}_i=\begin{pmatrix} x_{11}^{(i)} & x_{12}^{(i)} & \cdots & x_{1n}^{(i)} \\ x_{21}^{(i)} & x_{22}^{(i)} & \cdots & x_{2n}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}^{(i)} & x_{n2}^{(i)} & \cdots & x_{nn}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq n^2.$$

将这些矩阵的元素排成 $n^2$ 个列向量, 再拼在一起成为一个 $n^2$ 阶矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} x_{11}^{(1)} & x_{11}^{(2)} & \cdots & x_{11}^{\left(n^2\right)} \\ x_{12}^{(1)} & x_{12}^{(2)} & \cdots & x_{12}^{\left(n^2\right)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{nn}^{(1)} & x_{nn}^{(2)} & \cdots & x_{nn}^{\left(n^2\right)} \end{pmatrix}.$$

显然, 矩阵 $\boldsymbol{X}_i$ 是非异阵当且仅当 $\det\left(\boldsymbol{X}_i\right) \neq 0$, 矩阵 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_{n^2}$ 线性无关当且仅当 $\det(\boldsymbol{M}) \neq 0$. 考虑关于未定元 $x_{ij}^{(k)}\left(1 \leq i, j \leq n, 1 \leq k \leq n^2\right)$ 的多元多项式

$$f\left(x_{ij}^{(k)}\right)=\det\left(\boldsymbol{X}_1\right) \det\left(\boldsymbol{X}_2\right) \cdots \det\left(\boldsymbol{X}_{n^2}\right) \det(\boldsymbol{M})$$

注意到 $\det\left(\boldsymbol{X}_i\right)\left(1 \leq i \leq n^2\right)$ 和 $\det(\boldsymbol{M})$ 作为多元多项式都不为零, 故由多元多项式的整性可知, 它们的乘积 $f$ 也非零, 从而在数域 $\mathbb{K}$ 中存在一组 (无穷组) 数 $a_{ij}^{(k)}(1 \leq i, j \leq n, 1 \leq k \leq n^2)$, 使得 $f\left(a_{ij}^{(k)}\right) \neq 0$. 因此, $M_n(\mathbb{K})$ 有一组 (无穷组) 由非异矩阵构成的基. 也可以直接进行构造: 设 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 是 $n$ 阶基础矩阵, 则容易验证 $\{\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{E}_{ij}(1 \leq i, j \leq n)\}$ 是一组非异矩阵构成的基.

2. 设数域 $\mathbb{K}$ 上的二元多项式 $f(x, y)$ 关于 $x$ 的次数小于等于 $n$, 关于 $y$ 的次数小于等于 $m$. 设 $\mathbb{K}$ 中存在两组互不相同的数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 和 $b_0, b_1, \cdots, b_m$, 使得

$$f\left(a_i, b_j\right)=0, \quad 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m,$$

证明: $f(x, y)$ 是零多项式.

证明：将 $f(x, y)$ 整理为关于主未定元 $x$ 的多项式:

$$f(x, y)=c_n(y) x^n+c_{n-1}(y) x^{n-1}+\cdots+c_1(y) x+c_0(y)$$

其中 $c_i(y)(0 \leq i \leq n)$ 都是关于 $y$ 的次数小于等于 $m$ 的多项式. 对于给定的 $b_j(0 \leq j \leq m)$, 关于 $x$ 的多项式 $f\left(x, b_j\right)=c_n\left(b_j\right) x^n+c_{n-1}\left(b_j\right) x^{n-1}+\cdots+c_1\left(b_j\right) x+c_0\left(b_j\right)$ 至少有 $n+1$ 个不同的根 $a_0, a_1, \cdots, a_n$, 于是 $f\left(x, b_j\right)$ 必为零多项式, 即有 $c_n\left(b_j\right)=c_{n-1}\left(b_j\right)=\cdots=c_1\left(b_j\right)=c_0\left(b_j\right)=0(0 \leq j \leq m)$. 这说明每个关于 $y$ 的次数小于等于 $m$ 的多项式 $c_i(y)(0 \leq i \leq n)$ 都有 $m+1$ 个不同的根 $b_0, b_1, \cdots, b_m$, 从而它们只能是零多项式, 于是 $f(x, y)$ 也是零多项式.

3. 已知对任意的 $t$, 有

$$f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)=t^r f(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

证明：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个 $r$ 次齐次多项式.

证:将 $f$ 进行齐次多项式分解:$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)+f_{m+1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\cdots+f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 其中 $1\le m\le n=\deg f$. 则

$$\begin{aligned}f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)&=f_m(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)+f_{m+1}(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)+\cdots+f_n(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)\\&=t^m f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)+t^{m+1}f_{m+1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\cdots+t^n f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n).\end{aligned}$$

又因

$$\begin{aligned}f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)=&t^r f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\=&t^r f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\cdots t^r f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n),\end{aligned}$$

通过比较不同次数的多项式前的系数，可得 $r=m=n$，即 $f=f_r(x_1,\cdots,x_n)$ 是一个 $r$ 次的齐次多项式。

4. 设 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 为多项式 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的 $n$ 个根，证明: $x_2,\ldots,x_n$ 的任一对称多项式均可表示为 $x_1$ 与 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 的多项式.

证明:设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的初等对称多项式为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$, 则由韦达定理可知 $\sigma_i=(-1)^i a_i(1\le i\le n)$. 由对称多项式基本定理, 我们只要证明 $x_2,\cdots,x_n$ 的初等对称多项式 $\tau_k(1\le k\le n-1)$ 均可表示为 $x_1$ 与 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的多项式即可. 注意到对任意的 $1\le k\le n$, 成立

$$\begin{aligned}\sigma_k&=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}\\&=x_1\sum_{2\le i_2<\cdots<i_k\le n}x_{i_2}\cdots x_{i_k}+\sum_{2\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}=x_1\tau_{k-1}+\tau_k,\end{aligned}$$

其中约定 $\tau_0=1,\tau_n=0$. 我们对 $k$ 进行归纳. 当 $k=1$ 时, $\tau_1=\sigma_1-x_1=-a_1-x_1$, 结论成立. 假设 $\tau_{k-1}$ 可表示为 $x_1$ 与 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的多项式, 则 $\tau_k=\sigma_k-x_1\tau_{k-1}=(-1)^k a_k-x_1\tau_{k-1}$ 也可表示为 $x_1$ 与 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的多项式.

5. 利用 Newton 公式将 $s_4$ 用初等对称多项式表示出来.

解：$n=1$ 时, 显然有 $s_4=\sigma_1^4$.

$n=2$ 时, 由 Newton 公式可得

$$\begin{cases}s_1-\sigma_1=0\\s_2-s_1\sigma_1+2\sigma_2=0\\s_3-s_2\sigma_1+s_1\sigma_2=0\\s_4-s_3\sigma_1+s_2\sigma_2=0\end{cases}$$

解得 $s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2$.

$n=3$ 时, 由 Newton 公式可得

$$\begin{cases} s_1-\sigma_1=0 \\ s_2-s_1\sigma_1+2\sigma_2=0 \\ s_3-s_2\sigma_1+s_1\sigma_2-3\sigma_3=0 \\ s_4-s_3\sigma_1+s_2\sigma_2-s_1\sigma_3=0 \end{cases}$$

解得 $s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2$.

$n\geq 4$ 时, 由 Newton 公式可得

$$\begin{cases} s_1-\sigma_1=0 \\ s_2-s_1\sigma_1+2\sigma_2=0 \\ s_3-s_2\sigma_1+s_1\sigma_2-3\sigma_3=0 \\ s_4-s_3\sigma_1+s_2\sigma_2-s_1\sigma_3+4\sigma_4=0 \end{cases}$$

解得 $s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2-4\sigma_4$.

6. 把 $n$ 元对称多项式 $f=\sum_{i\neq j}x_i^3x_j$ 表示为初等对称多项式的多项式.

解：通过计算可得 $f=\sigma_1^2\sigma_2-2\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_3+4\sigma_4$.

7. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $n$ 个复数, 满足:

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=r \\ \lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2=r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^n+\lambda_2^n+\cdots+\lambda_n^n=r \\ \lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}+\cdots+\lambda_n^{n+1}=r \end{cases}$$

其中 $r\in[0,n]$ 为整数. 请用 Newton 公式证明: $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中有 $r$ 个 $1,n-r$ 个 $0$ .

证：设 $S_k=\sum_{i=1}^n\lambda^k$ 及其对应的 $\sigma_k$. 通过 Newton 公式直接计算可得：$\sigma_1=C_1^r,\sigma_2=C_2^r,\cdots,\sigma_r=C_r^r,\sigma_{r+1}=\cdots\sigma_n=0$. 可得 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 满足的方程为

$$x^n-C_1^rx^{n-1}+C_2^rx^{n-2}+\cdots+(-1)^rx^{n-r}=0,$$

即 $(x-1)^rx^{n-r}=0$. 因此证得 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中有 $r$ 个 $1,n-r$ 个 $0$ .

8. (1) 请将下列对称有理函数表示为初等对称多项式的有理函数, 并求 $\sigma_1=0$ 时的函数值:

$$Q\left(x_1,x_2,x_3\right)=\frac{x_1^2}{2x_1^2+x_2x_3}+\frac{x_2^2}{2x_2^2+x_3x_1}+\frac{x_3^2}{2x_3^2+x_1x_2}$$

(2) 请将下列对称有理函数表示为初等对称多项式的有理函数, 并求 $\sigma_1=2$, $\sigma_2=-6$, $\sigma_3=1$ 时的函数值:

$$Q\left(x_1,x_2,x_3\right)=\frac{1}{x_1x_2+2x_3}+\frac{1}{x_2x_3+2x_1}+\frac{1}{x_3x_1+2x_2}.$$

解. (1) 通分后可得

$$Q\left(x_1,x_2,x_3\right)=$$
$$\frac{x_1^2\left(2x_2^2+x_3x_1\right)\left(2x_3^2+x_1x_2\right)+x_2^2\left(2x_3^2+x_1x_2\right)\left(2x_1^2+x_2x_3\right)+x_3^2\left(2x_1^2+x_2x_3\right)\left(2x_2^2+x_3x_1\right)}{\left(2x_1^2+x_2x_3\right)\left(2x_2^2+x_3x_1\right)\left(2x_3^2+x_1x_2\right)}.$$

注意到 $Q\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 的分子和分母都是关于 $x_1,x_2,x_3$ 的 6 次齐次对称多项式, 故可通过待定系数法将它们化为初等对称多项式的多项式. 经计算可得

$$Q\left(x_1,x_2,x_3\right)=\frac{\sigma_1^3\sigma_3+4\sigma_2^3-15\sigma_1\sigma_2\sigma_3+27\sigma_3^2}{2\sigma_1^3\sigma_3+4\sigma_2^3-18\sigma_1\sigma_2\sigma_3+27\sigma_3^2}.$$

当 $\sigma_1=0$ 时, $Q\left(x_1,x_2,x_3\right)=1$.

(2) 通分后可得

$$Q\left(x_1,x_2,x_3\right)=$$
$$\frac{\left(x_2x_3+2x_1\right)\left(x_3x_1+2x_2\right)+\left(x_3x_1+2x_2\right)\left(x_1x_2+2x_3\right)+\left(x_1x_2+2x_3\right)\left(x_2x_3+2x_1\right)}{\left(x_1x_2+2x_3\right)\left(x_2x_3+2x_1\right)\left(x_3x_1+2x_2\right)}.$$

注意到 $Q\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 的分子和分母都是关于 $x_1,x_2,x_3$ 的对称多项式, 故可通过 Vieta 定理将它们化为初等对称多项式的多项式. 经计算可得

$$Q\left(x_1,x_2,x_3\right)=\frac{\sigma_1\sigma_3+2\sigma_1\sigma_2-6\sigma_3+4\sigma_2}{\sigma_3^2+2\sigma_1^2\sigma_3-4\sigma_2\sigma_3+4\sigma_2^2-8\sigma_1\sigma_3+8\sigma_3}.$$

当 $\sigma_1=2,\sigma_2=-6,\sigma_3=1$ 时, $Q\left(x_1,x_2,x_3\right)=-\frac{4}{13}$.

9. 已知多项式 $f(x)=x^2+(k+6)x+(4k+2)$ 和 $g(x)=x^2+(k+2)x+2k$ 的结式 $R(f,g)=0$, 求 $k$ 的值。

解：直接计算结式可得 $R(f,g)=-4k^2+16k-12$. 设其为 0 可解得 $k=1,3$.

10. 设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的多项式，已知 $\Delta(f(x))$, 试求 $\Delta(f(x^2))$.

解：设 $f(x)=a_0(x-x_1)\cdots(x-x_n)$，则其判别式可写成：

$$\Delta(f)=a_0^{2n-2}\Pi_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)^2.$$

令

$$\begin{aligned}g(x)=&f(x^2)\\=&a_0(x^2-x_1)\cdots(x^2-x_n)\\=&a_0(x-\sqrt{x_1})(x+\sqrt{x_1})\cdots(x-\sqrt{x_n})(x+\sqrt{x_n}).\end{aligned}$$

这里 $\sqrt{x_i}$ 是复数意义下的。由此可得

$$
\begin{aligned}
\Delta(g) =& a_0^{4n-2}(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2\cdots(\sqrt{x_{n-1}}-\sqrt{x_n})^2(\sqrt{x_{n-1}}+\sqrt{x_n})^2 \\
&\cdots(-\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2(-\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2\cdots(-\sqrt{x_{n-1}}-\sqrt{x_n})^2(-\sqrt{x_{n-1}}+\sqrt{x_n})^2 \\
&\cdot \Pi_{i=1}^n(-2\sqrt{x_i})^2 \\
=& a_0^{4n-2}\Pi_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)^4\Pi_{i=1}^n(2\sqrt{x_i})^2 \\
=& (\Delta(f))^2a_0^2 4^n\Pi_{i=1}^n x_i \\
=& (\Delta(f))^2 a_0 a_n(-4)^n.
\end{aligned}
$$