1. 求下列矩阵的特征值和相应的特征向量:

(i) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -5 & 7 & -1 \end{pmatrix}$; (ii) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & -12 & -6 \end{pmatrix}$.

解 (i) $\lambda_1 = 1$, $\xi_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 = 2$(两重根), $\xi_2 = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $c_2 \in \mathbb{R}$.

(ii) $\lambda_1 = 0$, $\xi_1 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $c_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 = 2$, $\xi_2 = c_2 \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_3 = -3$ $\xi_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $c_3 \in \mathbb{R}$.

2. 已知向量 $\mathbf{x} = (1, k, 1)'$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵的特征向量，求 k.

解：当 $\lambda = 1$, $k = -2$; 当 $\lambda = 1/4$, $k = 1$.

3. 设 A 为 3 阶矩阵, 其特征值为 $1, -1, 2$. 求 (1) 行列式 $|A - 5I|$. (2) $(A^*)^2 + I$ 的特征值.

解 (1) 令 $f(x) = x - 5$, 则 $A - 5I = f(A)$, 所以 $A - 5I$ 的全部特征值为 $f(1) = -4, f(-1) = -6, f(2) = -3$. 因此 $|A - 5I| = (-4)(-6)(-3) = -72$. (2) 由于 $AA^* = |A| \cdot I$ 而且 $|A| = 1 \cdot (-1) \cdot 2 = -2 \neq 0$, 所以 $A^* = -2A^{-1}$. 令 $g(x) = (-2x)^2 + 1$, 则 $(A^*)^2 + I = g(A^{-1})$. 而 A^{-1} 的全部特征值为 $1^{-1} = 1, (-1)^{-1} = -1, 2^{-1} = 1/2$, 所以 $(A^*)^2 - 5I$ 的全部特征值为 $g(1) = 5$, $g(-1) = 5$, $g(1/2) = 2$.

4. 设 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 其中 $a_{ij} = |i - j|$, 求 $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.

[分析] 因为 $\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2$ 恰好是矩阵 A^2 的全部特征值, 所以只要求 A^2 的迹. 解平方数 $\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2$ 恰好是矩阵 A^2 的全部特征值, 故它们的和是矩阵 A^2 的迹; 但矩阵 A^2 的对角线 (i, i) 元素是 $\sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ji}$; 所以 $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \operatorname{tr} A^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |i-j|^2 = \sum_{k=1}^n 2k(n-k)^2 = \frac{n^2(n^2-1)}{6}$. 注：$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

5. 设 $\mathcal{V} = M_n(\mathbb{C})$ 是 n 阶复方阵全体构成的集合.

(1) 将 $\mathcal{V}$ 看成是复线性空间, $\mathcal{V}$ 上的线性变换 φ 定义为 $\varphi(X) = JX$, 其中 J 是基础循环矩阵 (高代白皮书例 2.1), 试求 φ 的全体特征值和对应的特征向量;

(2) 将 $\mathcal{V}$ 看成是实线性空间, $\mathcal{V}$ 上的线性变换 φ 定义为 $\varphi(X) = \overline{X}$, 其中 $\overline{X}$ 是 X 的共轭矩阵, 试求 φ 的全体特征值和对应的特征向量.

解：(1) 设 $\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n} (0 \le k \le n-1)$, 则由高代白皮书例 6.9 和例 6.55 可知, $\boldsymbol{\alpha}_k = \left(1, \omega_k, \cdots, \omega_k^{n-1}\right)'$ 是基础循环矩阵 J 关于特征值 ω_k 的特征向量, 且 $\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关. 设 $\boldsymbol{e}_i' = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ 为标准单位行向量, 参考高代白皮书例 6.1 的讨论可知, $\varphi(\boldsymbol{\alpha}_k \boldsymbol{e}_i') = J(\boldsymbol{\alpha}_k \boldsymbol{e}_i') = (J\boldsymbol{\alpha}_k) e_i' = \omega_k (\boldsymbol{\alpha}_k e_i')$, 即 $\boldsymbol{\alpha}_k \boldsymbol{e}_i'$ 是 φ 关于特征值 ω_k 的特征向量. 容易验证 $\{\boldsymbol{\alpha}_k \boldsymbol{e}_i' (0 \le k \le n-1, 1 \le i \le n)\}$ 是一组线性无关的矩阵, 于是 φ 的特征值为

$\omega_k(0 \le k \le n-1)$ (各 n 重), 对应的线性无关特征向量为 $\alpha_k \boldsymbol{e}_i'(0 \le k \le n-1, 1 \le i \le n)$.
(2) 显然, φ 是实线性变换 (不是复线性变换) 且满足 $\varphi^2 = I_V$, 于是 φ 的特征值只可能是 ± 1. 设 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} + \mathrm{i}\boldsymbol{B} \in V$, 其中 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是实矩阵, 若 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$, 则有 $A - \mathrm{i}B = A + \mathrm{i}B$, 于是 $B = O$; 若 $\varphi(X) = -X$, 则有 $A - \mathrm{i}B = -A - \mathrm{i}B$, 于是 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$. 因此, φ 的特征值为 ± 1(各 n^2 重), 特征值 1 的线性无关特征向量为 $\{\boldsymbol{E}_{ij}(1 \le i, j \le n)\}$, 特征值 -1 的线性无关特征向量为 $\{\mathrm{i}\boldsymbol{E}_{ij}(1 \le i, j \le n)\}$.

6. 证明: 对角形矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

相似的充分必要条件是 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个排列.

证充分性. 设 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个排列, $b_j = a_1, (j = 1, 2, \cdots, n, i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列). 当前一矩阵被视为 n 维向量空间 V 中某线性变换 σ 在标准基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 下的矩阵, 即有

$$\sigma\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\right) = \left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\right) \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

时, 那么后一矩阵便是 V 中同一线性变换在基 $(\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \cdots, \varepsilon_{i_*})$ 下的矩阵, 即

$$\sigma\left(\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \cdots, \varepsilon_{i_n}\right) = \left(\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \cdots, \varepsilon_{i_n}\right) \begin{pmatrix} a_{i_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{i_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{i_n} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \cdots, \varepsilon_{i_n}\right) \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix},$$

故两矩阵相似.

必要性. 分别记两矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$, 并设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相似, 则两特征多项式相等, 即

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| \text{ 或 } \prod_{1=1}^{n}\left(\lambda - a_i\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(\lambda - b_i\right),$$

故有 $b_i = a_{i_i}$, 即 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个排列.

7. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 设 $g(\lambda) = |\lambda I_n - B|$ 是 B 的特征多项式, 证明矩阵 $g(A)$ 可逆的充要条件是 A 和 B 没有公共的特征值.

证设 $g(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$, 即 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 B 的全部特征根,

则 $g(A)=(A-\lambda_1 I)\cdots(A-\lambda_n I)=(-1)^n(\lambda_1 I-A)\cdots(\lambda_n I-A)$, 那么行列式 $|g(A)|=(-1)^{n^2}|\lambda_1 I-A|\cdots|\lambda_n I-A|$ 矩阵 $g(A)$ 可逆的充要条件是行列式 $|g(A)|\neq 0$, 它的充要条件是每个 $|\lambda_i I-A|\neq 0(1\leqslant i\leqslant n)$, 也就是所有 $\lambda_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 都不是 A 的特征值.

8. 设 n 阶方阵 A 的所有元素都是整数, 其中阶数 n 为偶数, 并且对任意的 $1\leq r\leq n$, A 的所有 r 主子式之和都是奇数. 证明: 不存在整数 k, 使得线性方程组 $A\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{x}$ 有非零解.

证明: 设 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$, 则由高代白皮书的例 1.47 可知, a_r 等于 $(-1)^r$ 乘以 $\boldsymbol{A}$ 的 r 阶主子式之和, 再由假设可知 $a_r(1\leq r\leq n)$ 都是奇数, 以及 n 是偶数. 用反证法证明结论, 若存在整数 k, 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{x}$ 有非零解, 则 k 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 即为 $f(\lambda)$ 的根. 若 k 为奇数, 则 $k^n, a_1k^{n-1}, \cdots, a_{n-1}k$ 和 a_n 都是奇数, 于是 $f(k)=k^n+a_1k^{n-1}+\cdots+a_{n-1}k+a_n$ 为奇数, 这与 $f(k)=0$ 矛盾. 若 k 为偶数, 则 $k^n, a_1k^{n-1}, \cdots, a_{n-1}k$ 都是偶数, 但 a_n 为奇数, 于是 $f(k)=k^n+a_1k^{n-1}+\cdots+a_{n-1}k+a_n$ 为奇数, 这与 $f(k)=0$ 矛盾.

9. 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 并且存在 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵 B, 使得 $AB-BA=aI_n+A$, 其中 $a\in\mathbb{K}$, 试求 A 的特征多项式.

解: 将条件整理为 $(aI_n+A)B-B(aI_n+A)=aI_n+A$, 由高代白皮书例 6.32 及其注可知, $a\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}$ 的特征值全为零, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 $-a$, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $(\lambda+a)^n$.

10. 设 A,B 为 n 阶方阵, 满足: $A^2-2AB+B^2=0$.

(1) 若 $n=2$, 证明: $AB=BA$;

(2) 若 $n\geq 3$, 举例说明: $AB=BA$ 不一定成立.

证明: 由 $A^2-2AB+B^2=O$ 经整理可得 $(A-B)^2=AB-BA=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}(A-B)$. 令 $C=A-B$, 则 $C^2=CB-BC$. 由高代白皮书例 6.32 及其注可知 C^2 是幂零阵, 从而 C 也是幂零阵. (1) 若 $n=2$, 则 $\boldsymbol{O}=\boldsymbol{C}^2=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$, 即有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. (2) 若 $n\geq 3$, 则令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_{23}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_{12}$, 则 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}_{23}^2-2\boldsymbol{E}_{23}\boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{12}^2=0$. 此时, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}, \boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}_{13}$, 两者不相等.