1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$. 求矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

解：令 $P=(X_1,X_2,X_3)=\begin{pmatrix}-2&2&1\\1&0&2\\0&1&-2\end{pmatrix}$, 则 $P^1\Lambda P=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&-7\end{pmatrix}$.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&y\end{pmatrix}$ 相似,

(1) 求 x,y 的值.

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

解:(1) 因为 $|-2I-A|=0$, 所以矩阵 A 有特征值 -2 . 那么矩阵 B 也有特征值 -2 . 但 B 的特征值为 $-1,2,y$; 故 $y=-2$. 再由 $\operatorname{tr}A=\operatorname{tr}B$, 即 $-2+x+1=-1+2+y$, 就得 $x=0$.

(2) 对特征值 -1 , 求解线性方程组 $(-I-A)X=0$, 得基础解系 $x_1=(0,2,-1)'$. 对特征值 2, 求解线性方程组 $(2I-A)X=0$, 得基础解系 $x_2=(0,1,1)'$. 对特征值 -2 , 求解线性方程组 $(-2I-A)X=0$, 得基础解系 $x_3=(1,0,-1)'$. $P=(X_1,X_2,X_3)=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}$, 恻 $P^{-1}AP=B$.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\1&1&1&0\\0&-1&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$, 试将 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 表示为 $\boldsymbol{A}$ 的三次多项式.

解 $f(\lambda)=(\lambda-1)^4$, $f(A)=0$, $A(A^3-4A^2+2A)=-I$, $A^{-1}=-A^3+4A^2-2A$.

4. 设 n 阶复方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, 求证: $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 经过适当的排序后, 可满足 $\lambda_i+\mu_i=\lambda_i\mu_i(1\le i\le n)$. 特别地, $\boldsymbol{A}$ 是幂零阵当且仅当 $\boldsymbol{B}$ 是幂零阵.

证明：由高代白皮书例 2.21 可知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, 再由高代白皮书例 6.40 可知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可同时上三角化, 即存在非异阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1&*&\cdots&*\\&\lambda_2&\cdots&*\\&&\ddots&\vdots\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\mu_1&*&\cdots&*\\&\mu_2&\cdots&*\\&&\ddots&\vdots\\&&&\mu_n\end{pmatrix}$$

比较等式 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\right)$ 两边矩阵的主对角元即得 $\lambda_i+\mu_i=\lambda_i\mu_i(1\le i\le n)$.$\boldsymbol{A}$ 为幂零阵当且仅当所有的 $\lambda_i=0$, 由上式可知这当且仅当所有的 $\mu_i=0$, 这也当且仅当 B 为幂零阵.

5. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实对称阵, 证明: 若 s 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 的一个特征值, 则存在 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_0 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 μ_0, 使得 $s=\lambda_0\mu_0$.

证明: 由 A, B, AB 都是实对称阵可知 $AB=(AB)'=B'A'=BA$, 再由高代白皮书例 6.41 可知 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 可同时对角化, 即存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}, \quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\},$$

于是

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\right)=\operatorname{diag}\{\lambda_1\mu_1, \lambda_2\mu_2, \cdots, \lambda_n\mu_n\}.$$

因此, 对 AB 的任一特征值 s, 一定存在 $i\in[1,n]$, 使得 $s=\lambda_i\mu_i$.

6. 设 S 是某些 n 阶方阵构成的集合, 满足如下条件:

(1) $\boldsymbol{I}_n\in S$;

(2) 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\in S$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\in S$;

(3) 对任意的 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\in S, (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^3=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 成立.

证明: S 中的矩阵可以同时对角化, 并且 S 是有限集合.

证明: 由 (1) 在 (3) 中令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}_n$, 则对任意的 $\boldsymbol{A}\in S, \boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}$ 成立. 特别地, S 中的矩阵均可对角化, 且特征值只可能是 $0,1,-1$. 再由 (2) 和 (3) 可知, 对任意的 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\in S, \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^3=\boldsymbol{B}$, 即 S 中任意两个矩阵乘法可交换. 由高代白皮书例 6.44 可知, S 中的矩阵可同时对角化. 考虑到特征值的限制, 不难得到 $\sharp S\leq 3^n$.

7. (1) 若 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}}$, 则称为正交阵. 证明正交阵的特征值是模长等于 1 的复数.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶正交阵且 $|\boldsymbol{A}|=1$, 求证: 存在实数 $t\in[-1,3]$, 使得

$$\boldsymbol{A}^3-t\boldsymbol{A}^2+t\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_3=\boldsymbol{O}.$$

证明: 注意到正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 ± 1 或模长为 1 的共轭虚数, 又 $|\boldsymbol{A}|=1$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值中至少有一个 1 , 另外两个特征值可设为 $\cos\theta\pm i\sin\theta$. 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)=\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3$, 则由 Vieta 定理可得 $a_1=-(1+2\cos\theta), a_2=1+2\cos\theta, a_3=-1$. 令 $t=1+2\cos\theta$, 则 $t\in[-1,3]$, 由 Cayley-Hamilton 定理可得 $\boldsymbol{A}^3-t\boldsymbol{A}^2+t\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_3=\boldsymbol{O}$.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 证明: 若下列条件之一成立, 则矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}$ 只有零解:

(1) $\boldsymbol{A}$ 为幂零阵, 即存在正整数 m, 使得 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$;

(2) $\boldsymbol{A}$ 的所有元素都为 1 ;

(3) $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为偶数;

证明: 将原矩阵方程整理为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}}-\boldsymbol{A})$, 我们只要验证 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 没有公共的特征值, 那么由高代白皮书例 6.88 即得原矩阵方程只有零解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$.

(1) A 的特征值全为 $0, I_n-A$ 的特征值全为 1 ;

(2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 ($n-1$ 重), n (1 重), $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1 ($n-1$ 重), $1-n$ (1 重);

(3) A 的特征值全为偶数, I_n-A 的特征值全为奇数;

9. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 适合多项式 $f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 其中 $|a_m|>\sum_{i=0}^{m-1}|a_i|$. 证明: 矩阵方程 $2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2$ 只有零解.

证明: 任取 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_0, 则 $f(\lambda_0)=0$, 我们断言 $|\lambda_0|<1$. 用反证法, 若 $|\lambda_0|\geq 1$, 则 $|a_m|=\left|-\sum_{i=0}^{m-1}a_i\lambda_0^{-m+i}\right|\leq\sum_{i=0}^{m-1}|a_i||\lambda_0|^{-m+i}\leq\sum_{i=0}^{m-1}|a_i|$, 这与假设矛盾. 将矩阵方程整理为 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2$, 注意到 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}_n$ 的特征值落在 $D_1:|z-2|<1$ 中, $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值落在

$D_2 : |z| < 1$ 中, 显然这两个开圆盘不相交, 故 $\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}_n$ 和 $\boldsymbol{A}^2$ 没有公共的特征值, 最后由小白书例 6.88 可知矩阵方程只有零解.

10. 设 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的特征值都大于零, 且 $\boldsymbol{A}^4 + 2\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^3 + \boldsymbol{B}^4$, 证明: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

证明：将 $A^4 + 2A^3B = 2AB^3 + B^4$ 整理为

$$A\left(A^3 - AB^2 + A^2B - B^3\right) = \left(A^3 - \boldsymbol{A}B^2 + A^2\boldsymbol{B} - B^3\right)(-B),$$

注意到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正数, $-B$ 的特征值全为负数, 故 $\boldsymbol{A}$ 与 $-\boldsymbol{B}$ 没有公共的特征值, 由高代白皮书例 6.88 可得 $\boldsymbol{A}^3 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^2 + A^2\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^3 = \boldsymbol{O}$. 再将这一等式整理为 $\boldsymbol{A}\left(A^2 - B^2\right) = \left(A^2 - B^2\right)(-B)$, 由相同的理由可得 $A^2 - B^2 = O$. 最后将上述等式整理为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})(-\boldsymbol{B})$, 由相同的理由可得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.