1. 已知矩阵的下列不变因子组，写出 Jordan 标准型.

(1) $1,\cdots,1,\lambda,\lambda(\lambda-1)^2,\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-4)$;

(2) $1,\cdots,1,\lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda-7)^3$;

(3) $1,\cdots,1,\lambda^2+1,\lambda(\lambda^2+1),\lambda(\lambda^2+1)$.

2. 求过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为 Jordan 标准型.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$; (2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; (3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. (1) 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的一切可能的若尔当标准型;

(ii) 给出 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的一个充要条件.

(2) 求出

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 \end{pmatrix}$$

的一切可能的若尔当标准型.

解 (1) (i) $\det(\lambda I-\boldsymbol{A})=(\lambda-2)^2(\lambda+1)$. 若 $a\neq 0$, 可验算 $(A-2I)(A+I)\neq O$, 所以 A 的最小多项式为 $(\lambda-2)^2(\lambda+1)$. 不计若尔当块的次序, A 的若尔当标准形式为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

若 $a=0, \boldsymbol{A}$ 的最小多项式是 $(\lambda-2)(\lambda+1)$, 不计若尔当块的次序, A 的若尔当标准形式为

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{bmatrix}.$$

(ii) A 可以对角化 $\Leftrightarrow$ A 的最小多项式无重根, 即 A 的最小多项式为 $(\lambda-2)(\lambda+1)\Leftrightarrow a=0$.

(2) 解 $\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^4, \boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $(\lambda-2)^2$. 它的一切可能的若尔当形式在不考虑若尔当块次序的情况下, 有

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

通过一般方法可以验证, $a\neq 0$ 时将得到第一种形式; $a=0$ 时将得到第二种形式.

4. 设 V 为 n 阶复方阵全体构成的线性空间，V 上的线性变换 φ 定义为 $\varphi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}'$, 其中 $\boldsymbol{A}\in V$. 证明：φ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

证明: 充分性，设 $\boldsymbol{P}$ 为 n 阶可逆矩阵, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$. 设

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i.$$

且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关. 由第 3 章的解答题 3 可知, $\left\{\alpha_i\alpha_j',1\le i,j\le n\right\}$ 是 V 中 n^2 个线性无关的矩阵. 注意到

$$\varphi\left(\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_j'\right)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_j'-\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_j'\boldsymbol{A}'=\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i\right)\boldsymbol{\alpha}_j'-\boldsymbol{\alpha}_i\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j\right)'=\left(\lambda_i-\lambda_j\right)\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_j'$$

故 φ 有 n^2 个线性无关的特征向量, 从而可对角化.

下证必要性. 用反证法, 设 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}=\operatorname{diag}\{\boldsymbol{J}_{r_1}(\lambda_1),\cdots,\boldsymbol{J}_{r_k}(\lambda_k)\}$ 为 Jordan 标准型, 其中 $r_1>1$. 设 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 为列分块, 任取 A 的特征向量 $\boldsymbol{\beta}$ 以及特征值 λ_0. 令 $U=L(\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\beta}',1\le i\le r_1)$, 则由第 3 章的解答题 3 可知 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\beta}',1\le i\le r_1\}$ 是 U 的一组基. 经简单计算可得

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}')=(\lambda_1-\lambda_0)\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}',\quad \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}')=\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}'+(\lambda_1-\lambda_0)\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}'$$
$$\cdots,\quad \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}_{r_1}\boldsymbol{\beta}')=\boldsymbol{\alpha}_{r_1-1}\boldsymbol{\beta}'+(\lambda_1-\lambda_0)\boldsymbol{\alpha}_{r_1}\boldsymbol{\beta}'$$

于是 U 是 φ-不变子空间. 由于 φ 可对角化, 故由例 7.36 可知 $\varphi|_U$ 也可对角化, 但 (7.9) 式告诉我们 $\boldsymbol{\varphi}|_U$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\beta}',1\le i\le r_1\}$ 下的表示矩阵为 $\boldsymbol{J}_{r_1}(\lambda_1-\lambda_0)$, 这个矩阵不可对角化, 矛盾!

5. 证明实对称阵的特征值都是实数. 进一步, 利用 Jordan 标准型理论和反证法证明实对称阵都可实对角化.

引理 1 实对称阵的特征值都是实数.

证明设 A 为 n 阶实对称阵, $\lambda_0\in\mathbb{C}$ 是 A 的任一特征值, $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'\in\mathbb{C}^n$ 是对应的特征向量, 即 $A\alpha=\lambda_0\alpha$. 上式两边同时左乘 $\bar{\alpha}'$, 则有 $\bar{\alpha}'A\alpha=\lambda_0\bar{\alpha}'\alpha$. 注意到 α 是非零向量, 故 $\bar{\alpha}'\alpha=\sum_{i=1}^n|a_i|^2>0$. 注意到 A 为实对称阵, 故 $\overline{(\bar{\alpha}'A\alpha)}'=\bar{\alpha}'A\alpha$, 即 $\bar{\alpha}'A\alpha$ 是一个实数, 从而 $\lambda_0=\frac{\bar{\alpha}'A\alpha}{\bar{\alpha}'\alpha}$ 也是实数.

引理 2 A 为 n 阶实对称阵，设 λ 是 A 的任意特征值。求证 $\ker(A-\lambda I)=\ker(A-\lambda I)^2$.

证明设 λ 是 A 的任意特征值, 令 $\alpha\in\ker(A-\lambda I)^2$, 将证明 α 实际上是 A 关于 λ 的特征向量。首先注意到 $(A-\lambda I)^2\alpha=0\implies\alpha'(A-\lambda I)^2\alpha=0$. 因为 A 为实对称矩阵，引理 1 说明 λ 为实数，则有 $\implies((A-\lambda I)\alpha)'(A-\lambda I)\alpha=0$ 即 $\|(A-\lambda I)\alpha\|=0$ 或 $(A-\lambda I)\alpha=0$.

证明：若 A 不可对角化，则至少存在一个 Jordan 块, 其阶数 ≥ 2。设其对应的特征值为 λ，则有 $\ker(A-\lambda I)\subsetneq\ker(A-\lambda I)^2$, 这与引理 2 矛盾。

6. 设 n 阶复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足: 对任意的正整数 k, $\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}^k\right)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$. 求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型.

解：设 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则 $\boldsymbol{A}^k$ 的全体特征值为 $\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k$, 于是 $\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}^k\right)=s_k=\lambda_1^k+\lambda_2^k+\cdots+\lambda_n^k=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r(k\geq 1)$. 根据 Newton 公式经计算可得 $\lambda_1=\cdots=\lambda_r=1,\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$. 若在 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型中, 存在特征值 0 的阶数大于 1 的 Jordan 块, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})>r$, 这与假设矛盾. 因此, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}=\operatorname{diag}\{\boldsymbol{J}_{r_1}(1),\cdots,\boldsymbol{J}_{r_s}(1),0,\cdots,0\}$, $r_1+\cdots+r_s=r$.

7. 设 $n(n>2)$ 阶复方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 2，试求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型.

解：设 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型 $J=\operatorname{diag}\left\{J_{r_1}(0), \cdots, J_{r_k}(0), J_{s_1}\left(\lambda_1\right), \cdots, J_{s_l}\left(\lambda_l\right)\right\}$, 其中 $\lambda_j \neq 0(1 \leq j \leq l)$. 注意到 $\mathrm{r}(J)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$, 故有

$$2=\left(r_1-1\right)+\cdots+\left(r_k-1\right)+s_1+\cdots+s_l=\left(r_1+\cdots+r_k+s_1+\cdots+s_l\right)-k=n-k$$

于是 $k=n-2$ 并且只有以下五种可能:

(1) $r_1=\cdots=r_k=1, l=1, s_1=2: \boldsymbol{J}=\operatorname{diag}\left\{0, \cdots, 0, \boldsymbol{J}_2\left(\lambda_1\right)\right\}$, 其中 $\lambda_1 \neq 0$;

(2) $r_1=\cdots=r_k=1, l=2, s_1=s_2=1: J=\operatorname{diag}\left\{0, \cdots, 0, \lambda_1, \lambda_2\right\}$, 其中 $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$

(3) $r_1=\cdots=r_{k-1}=1, r_k=2, l=1, s_1=1: J=\operatorname{diag}\left\{0, \cdots, 0, J_2(0), \lambda_1\right\}$, 其中 $\lambda_1 \neq 0$

(4) $r_1=\cdots=r_{k-1}=1, r_k=3, l=0: J=\operatorname{diag}\left\{0, \cdots, 0, J_3(0)\right\}$

(5) $r_1=\cdots=r_{k-2}=1, r_{k-1}=r_k=2, l=0: \boldsymbol{J}=\operatorname{diag}\left\{0, \cdots, 0, \boldsymbol{J}_2(0), \boldsymbol{J}_2(0)\right\}$

8. 设 $n(n>2)$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式为 $\lambda^3-\lambda^2$, 试求 $\boldsymbol{A}$ 可能的互不相似的 Jordan 标准型的总个数.

解：由于 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式为 $\lambda^3-\lambda^2$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型中可能出现的 Jordan 块只能是以下三种: $\boldsymbol{J}_1(0), \boldsymbol{J}_2(0)$ 和 $\boldsymbol{J}_1(1)$. 设这三种 Jordan 出现的次数为 x, y, z, 则 $x+2y+z=n$ 且 $x \geq 0, y \geq 1, z \geq 1$. 这一方程整数解的个数即为 $\boldsymbol{A}$ 可能的互不相似的 Jordan 标准型的总个数. 下分两种情况讨论. (1) 若 $n=2k(k \geq 2)$, 则 $1 \leq y \leq k-1, 1 \leq z \leq n-2y, x=n-2y-z$, 即若 y 取定, 则 z 有 $n-2y$ 种选择, 而 x 被唯一确定. 因此, 方程整数解的个数为

$$\sum_{y=1}^{k-1}(n-2y)=n(k-1)-2 \sum_{y=1}^{k-1} y=k(k-1)=\frac{1}{4} n(n-2).$$

(2) 若 $n=2k+1(k \geq 1)$, 则 $1 \leq y \leq k, 1 \leq z \leq n-2y, x=n-2y-z$, 即若 y 取定, 则 z 有 $n-2y$ 种选择, 而 x 被唯一确定. 因此, 方程整数解的个数为

$$\sum_{y=1}^{k}(n-2y)=nk-2 \sum_{y=1}^{k} y=k^2=\frac{1}{4}(n-1)^2.$$

9. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 $n(n \geq 2)$ 阶方阵, 已知 $\boldsymbol{AB}$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}_n(0)$, 试求 $\boldsymbol{BA}$ 的 Jordan 标准型, 并举例说明存在性.

解：由于 AB 的 Jordan 标准型为 $J_n(0)$, 故 AB 的特征值全为零且 $(AB)^{n-1} \neq O$. 由特征值的降阶公式可知 BA 的特征值也全为零, 于是 BA 的特征多项式为 λ^n. 再由 $O \neq (AB)^{n-1}=A(BA)^{n-2}B$ 可知 $(BA)^{n-2} \neq O$. 于是 $B\boldsymbol{A}$ 的极小多项式 λ^k 满足 $k>n-2$. 下面分两种情况讨论.

(1) 若 $\boldsymbol{BA}$ 的极小多项式为 λ^{n-1}, 则 $\boldsymbol{BA}$ 的初等因子组为 λ, λ^{n-1}, 于是 $\boldsymbol{BA}$ 的 Jordan 标准型为 $\operatorname{diag}\left\{0, \boldsymbol{J}_{n-1}(0)\right\}$. 例如, $\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}\{1, \cdots, 1,0\}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{J}_n(0)$, 则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{J}_n(0)$, $\boldsymbol{BA}=\operatorname{diag}\left\{\boldsymbol{J}_{n-1}(0), 0\right\}$

(2) 若 $\boldsymbol{BA}$ 的极小多项式为 λ^n, 则 $\boldsymbol{BA}$ 的初等因子组为 λ^n, 于是 $\boldsymbol{BA}$ 的 Jordan 标准型也为 $\boldsymbol{J}_n(0)$. 例如, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{J}_n(0)$, 则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{J}_n(0)$.

10. 设 V 为 n 阶复方阵全体构成的线性空间，V 上的线性变换 φ 定义为 $\varphi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{JXJ}$, 其中 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_n(0)$ 是特征值为 0 的 n 阶 Jordan 块. 试求 φ 的 Jordan 标准型.

解：设 $\boldsymbol{E}_{ij}(1 \leq i, j \leq n)$ 为 n 阶基础矩阵, 为书写方便起见, 约定 $\boldsymbol{E}_{0,j}=\boldsymbol{O}(1 \leq j \leq n), \boldsymbol{E}_{i,n+1}=\boldsymbol{O}(1 \leq i \leq n)$, 经简单的计算可得 $\boldsymbol{\varphi}\left(\boldsymbol{E}_{ij}\right)=\boldsymbol{J}\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{E}_{i-1,j+1}(1 \leq i, j \leq n)$. 我们可将 $M_n(\mathbb{C})$ 的这组基 $\boldsymbol{E}_{ij}(1 \leq i, j \leq n)$ 适当地调整顺序, 构成 φ 的所有 Jordan 块对应的循

环子空间的循环轨道:

轨道 1 $\quad J_1(0): E_{11} \to \boldsymbol{O}$;

轨道 2 $\quad J_2(0): E_{21} \to \boldsymbol{E}_{12} \to \boldsymbol{O}$

轨道 3 $\quad J_3(0): E_{31} \to E_{22} \to E_{13} \to \boldsymbol{O}$;

$\cdots$

轨道 $n-1 \quad J_{n-1}(0): E_{n-1,1} \to \cdots \to E_{1,n-1} \to O$;

轨道 $n \quad J_n(0): \boldsymbol{E}_{n1} \to \boldsymbol{E}_{n-1,2} \to \cdots \to \boldsymbol{E}_{1n} \to \boldsymbol{O}$

轨道 $n+1 \quad \boldsymbol{J}_{n-1}(0): \boldsymbol{E}_{n2} \to \boldsymbol{E}_{n-1,3} \cdots \to \boldsymbol{E}_{2n} \to \boldsymbol{O}$;

$\cdots$

轨道 $2n-3 \quad J_3(0): \boldsymbol{E}_{n,n-2} \to \boldsymbol{E}_{n-1,n-1} \to \boldsymbol{E}_{n-2,n} \to \boldsymbol{O}$;

轨道 $2n-2 \quad \boldsymbol{J}_2(0): \boldsymbol{E}_{n,n-1} \to \boldsymbol{E}_{n-1,n} \to \boldsymbol{O}$;

轨道 $2n-1 \quad J_1(0): \boldsymbol{E}_{nn} \to \boldsymbol{O}$.

因此, φ 的 Jordan 标准型为

$$\operatorname{diag}\left\{\boldsymbol{J}_1(0), \boldsymbol{J}_2(0), \cdots, \boldsymbol{J}_{n-1}(0), \boldsymbol{J}_n(0), \boldsymbol{J}_{n-1}(0), \cdots, \boldsymbol{J}_2(0), \boldsymbol{J}_1(0)\right\}$$

也可以利用矩阵的 Kronecker 积来求解. 注意到 $\varphi^k(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{J}^k \boldsymbol{X} \boldsymbol{J}^k$, 故由高代白皮书例 6.102 可知, φ^k 在基础矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 构成的一组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{J}^k \otimes \left(\boldsymbol{J}^k\right)'$, 再由高代白皮书例 6.99 可知, 对任意的 $1 \leq k \leq n$, 有 $\mathrm{r}\left(\boldsymbol{\varphi}^k\right) = \mathrm{r}\left(\boldsymbol{J}^k \otimes \left(\boldsymbol{J}^k\right)'\right) = \mathrm{r}\left(\boldsymbol{J}^k\right) \mathrm{r}\left(\left(\boldsymbol{J}^k\right)'\right) = (n-k)^2$. 注意到 $\varphi^n = \mathbf{0}$, 即 φ 是幂零线性变换, 从而其特征值全为零. 最后由高代白皮书例 7.52 可知, 在 φ 的 Jordan 标准型中, $J_k(0)(1 \leq k \leq n-1)$ 的个数等于 $(n-k+1)^2 + (n-k-1)^2 - 2(n-k)^2 = 2$; $\boldsymbol{J}_n(0)$ 的个数等于 1 , 由此可得 $\boldsymbol{\varphi}$ 的 Jordan 标准型为

$$\operatorname{diag}\left\{\boldsymbol{J}_1(0), \boldsymbol{J}_1(0), \boldsymbol{J}_2(0), \boldsymbol{J}_2(0), \cdots, \boldsymbol{J}_{n-1}(0), \boldsymbol{J}_{n-1}(0), \boldsymbol{J}_n(0)\right\}$$

.