1. 已知 $f(x)$, $g(x)$, 试求 $q(x)$ 及 $r(x)$, 使得

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

且 $\deg r(x) < \deg g(x)$:

(i) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 1$, $g(x) = x^2 - 3x + 2$;

(ii) $f(x) = x^5 - x^3 + 3x^2 - 1$, $g(x) = x^3 - 3x + 2$.

2. 实数 m, p, q 满足什么条件时多项式 $x^2 + mx + 1$ 能够整除 $x^4 + px + q$?

3. 计算 $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3$ 与 $g(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$ 的最大公因式.

4. 设 $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$, $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$ 都是有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的多项式，求 $u(x)$, $v(x) \in \mathbb{Q}[x]$, 使得

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = (f(x), g(x)).$$

5. 设 $2x^3 - x^2 + 3x - 5 = a(x-2)^3 + b(x-2)^2 + c(x-2) + d$, 求 a, b, c, d.

6. 证明：数域 $\mathbb{K}$ 上的一个 n 次多项式 $f(x)$ 能被它的导数整除的充分必要条件是 $f(x) = a(x-b)^n$, 这里 a, b 是 $\mathbb{K}$ 中的数.

7. 证明有理系数多项式

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

没有重因式.

8. 令 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $\mathbb{K}[x]$ 的多项式，而 a, b, c, d 是 $\mathbb{K}$ 中的数，并且 $ad - bc \neq 0$, 证明：

$$(af(x) + bg(x), cf(x) + dg(x)) = (f(x), g(x)).$$

9. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^{3m} + A + I_n = O$, 其中 m 为正整数，求证： $A^2 + A + I_n$ 是非异阵，并求其逆阵.

10. 设循环矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

是非异阵，求证： A^{-1} 也是循环矩阵.