1. 把下列二次型化为对角型化为对角型并求出非异阵 $\boldsymbol{C}$.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$,

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_3x_4$,

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_1x_4+4x_2x_3+2x_2x_4-2x_3x_4$.

2. (1) 把二次型 $\sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3|i-j|x_ix_j$ 化为对角型并求出对应的非异阵 $\boldsymbol{C}$.

(2) 把二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 化为对角型并求出对应的非异阵 $\boldsymbol{C}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&\\1&1&\\&&2\end{pmatrix},\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}0&1&\\1&0&\\&&2\end{pmatrix}$, 在实数域中，矩阵 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ 中哪些与 $\boldsymbol{A}$ 相抵? 哪些与 $\boldsymbol{A}$ 合同? 哪些与 $\boldsymbol{A}$ 相似?

4. 求二次型 $f=x_1x_2+x_3x_4+\cdots+x_{2n-1}x_{2n}$ 的秩和正、负惯性指数.

5. 求实二次型 $f=\sum\limits_{i=1}^n x_i^2+2a\sum\limits_{1\le i<j\le n}x_ix_j$ 的秩和符号差，其中 $n>1$.

6. 设 a 为实数, 求下列 n 阶实对称阵的正负惯性指数:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&a^2&\cdots&a^{n-1}\\a&1&a&\cdots&a^{n-2}\\a^2&a&1&\cdots&a^{n-3}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a^{n-1}&a^{n-2}&a^{n-3}&\cdots&1\end{pmatrix}$$

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定实对称阵, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$, $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为对应的实二次型. 设去掉 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行和第 i 列后的主子阵为 $\boldsymbol{A}_i$, 证明: $f(\boldsymbol{x})$ 在 $x_i=1$ 的条件下的最小值为 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{|A_i|}, 1\le i\le n$.

8. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个互异的正实数, 试用两种方法证明: n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是正定阵, 其中 $a_{ij}=\frac{1}{a_i+a_j}$.

9. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶正定实对称阵, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 为 n 阶半正定实对称阵且主对角元全大于零, 证明: Hadamard 乘积 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=(a_{ij}b_{ij})$ 是正定实对称阵.

10. (1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定实对称阵, 证明: 对任意的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 成立 $0\le\boldsymbol{x}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'\right)^{-1}\boldsymbol{x}<1$, 并求等于零的充要条件; 进一步, 对任意的 $\boldsymbol{B}\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, 成立 $0\le\left|\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}\right|<1$, 并求等于零的充要条件;

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶半正定实对称阵, 证明: 存在 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 使得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'$ 正定且 $\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}')^{-1}\boldsymbol{x}=1$ 的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$; 进一步, 存在 $\boldsymbol{B}\in M_{n\times m}(\mathbb{R})(n\ge m)$, 使得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'$ 正定且 $\left|\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}\right|=1$ 的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-m$.