1. 把下列二次型化为对角型化为对角型并求出非异阵 $\boldsymbol{C}$.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$,

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_3x_4$,

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_1x_4+4x_2x_3+2x_2x_4-2x_3x_4$.

解：(i) $C'AC=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&\frac{7}{3}\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&-2&-\frac{1}{3}\\0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}$; (ii) $C=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1\end{pmatrix}$;

(iii) $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&2\\0&1&0&-1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.

2. (1) 把二次型 $\sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3|i-j|x_ix_j$ 化为对角型并求出对应的非异阵 $\boldsymbol{C}$.

(2) 把二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 化为对角型并求出对应的非异阵 $\boldsymbol{C}$.

解：解二次型

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}|i-j|x_ix_3=2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3,$$

其矩阵取

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}\quad P=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1\\1&\frac{1}{2}&-2\\0&0&1\end{pmatrix},$$

由

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1\\1&\frac{1}{2}&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$$

可知, 通过非奇异线性变换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1\\1&\frac{1}{2}&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

(2)$-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$. 答案不唯一.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&\\1&1&\\&&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}0&1&\\1&0&\\&&2\end{pmatrix}$, 在实数域中，矩阵 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ 中哪些与 $\boldsymbol{A}$ 相抵? 哪些与 $\boldsymbol{A}$ 合同? 哪些与 $\boldsymbol{A}$ 相似?

解：由于 $\operatorname{rank} A=\operatorname{rank} B=\operatorname{rank} D=3$ 但 $\operatorname{rank} C=2$, 所以 B, D 与 A 相抵, 但 C 不与 A 相抵; 从而 C 也不与 A 合同, 不与 A 相似. 显然 A 的特征值义 $1,-1,2; B$ 的特征值为 $1,1,-2$; 也容易计算出 D 的特征值为 $1,-1,2$. 所以 A, B, D 的正惯性指数都是 2 , 负惯性指数都是 1 , 因此在实数域中矩阵 B, D 中都与 A 合同. 最后, B 与 A 的特征值不相同, 所以 B 不与 A 相似. C 与 A 有相同的特征值, 而且特征值重数都是 1 , 即都可相似对角化, 所以 C 与 A 相似.

4. 求二次型 $f=x_1x_2+x_3x_4+\cdots+x_{2n-1}x_{2n}$ 的秩和正、负惯性指数. 解做满秩变换

$$\begin{cases}x_1=y_1-y_2,\\ x_2=y_1+y_2,\\ \cdots\\ x_{2n-1}=y_{2n-1}-y_{2n},\\ x_{2n}=y_{2n-1}+y_{2n},\end{cases}$$

则二次型化为

$$f=y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2+\cdots+y_{2n-1}^2-y_{2n}^2,$$

所以该二次型的秩为 $2n$, 正、负惯性指数都为 n.

5. 求实二次型 $f=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+2a\sum\limits_{1\le i<j\le n}x_ix_j$ 的秩和符号差，其中 $n>1$.

解该二次型的矩阵是 $A=\begin{pmatrix}1&a&\cdots&a\\a&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&a\\a&\cdots&a&1\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\Delta_\Lambda(\lambda)=|\lambda E-A|&=\begin{vmatrix}\lambda-1&-a&\cdots&-a\\-a&\lambda-1&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&-a\\-a&\cdots&-a&\lambda-1\end{vmatrix}\\&=(\lambda-1+a)^{n-1}(\lambda-1-(n-1)a),\end{aligned}$$

得出 A 的特征值为 $1+(n-1)a$ 和 $n-1$ 个 $1-a$. 分两种情形讨论.

情形 $1: a=1$. 矩阵 A 有 $n-1$ 个特征值为零, 一个特征值 $1+(n-1)a>0$, 所以该二次型秩为 1 , 正惯性指数为 1 , 负惯性指数为 0 , 从而符号差为 1 .

情形 $2: a=-\frac{1}{n-1}$, 则 A 的一个特征值 $1+(n-1)a=0$, 另外 $n-1$ 个特征值 $1-a>0$, 故该二次型秩为 $n-1$, 正惯性指数为 $n-1$, 负惯性指数为 0 , 从而符号差为 $n-1$.

以下就是 $a\neq 1,-\frac{1}{n-1}$ 的情形, 矩阵 A 的所有特征值非零故该二次型的秩为 n, 但正、负惯性指数和符号差需分三个开区间来讨论.

情形 $3: 1<a$; 则 A 的特征值 $1+(n-1)a>0$, 但其他 $n-1$ 个特征值 $1-a<0$, 所以该二次型秩为 n, 正惯性指数为 1 , 负惯性指数为 $n-1$, 从而符号差为 $2-n$.

情形 $4: -\frac{1}{n-1}<a<1$, 则 A 的特征值 $1+(n-1)a>0$, 其他 $n-1$ 个特征值 $1-a>0$, 所以该二次型秩为 n, 正惯性指数为 n, 负惯性指数为 0 , 从而符号差为 n.

情形 $5: a<-\frac{1}{n-1}$, 则 A 的特征值 $1+(n-1)a<0$, 其他 $n-1$ 个特征值 $1-a>0$, 所以该二次型秩为 n, 正惯性指数为 $n-1$, 负惯性指数为 1 , 从而符号差为 $n-2$.

6. 设 a 为实数, 求下列 n 阶实对称阵的正负惯性指数:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ a^2 & a & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & a^{n-2} & a^{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

解: 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i-1$ 行乘以 $-a$ 加到第 i 行上, 再将第 $i-1$ 列乘以 $-a$ 加到第 i 列上 $(i=n,\cdots,2)$, 最后可得一个对角阵 $\operatorname{diag}\{1,1-a^2,\cdots,1-a^2\}$, 于是

(1) 若 $a=\pm 1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 1 , 负惯性指数为 0 ;

(2) 若 $-1<a<1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 n, 负惯性指数为 0 ;

(3) 若 $a<-1$ 或 $a>1$, 则 A 的正惯性指数为 1 , 负惯性指数为 $n-1$.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定实对称阵, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)', f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为对应的实二次型. 设去掉 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行和第 i 列后的主子阵为 $\boldsymbol{A}_i$, 证明: $f(\boldsymbol{x})$ 在 $x_i=1$ 的条件下的最小值为 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{|A_i|}, 1\leq i\leq n$.

解: 注意到问题的条件和结论在 (正交) 合同变换 $A\mapsto P_{in}AP_{in}$ 下不改变, 其中 $\boldsymbol{P}_{in}$ 是对换第 i,n 行的初等矩阵, 故只要考虑 $i=n$ 的情形即可. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, $\boldsymbol{A}_n$ 是去掉 $\boldsymbol{A}$ 的第 n 行和第 n 列的主子阵, $\boldsymbol{y}=(x_1,\cdots,x_{n-1})'$, 则在 $x_n=1$ 的条件下, 考虑的二次型为

$$f(x)=(\boldsymbol{y}',1)\begin{pmatrix} A_n & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}' & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

由高代白皮书例 8.40 和行列式的降阶公式可知, 在 $x_n=1$ 的条件下, 当 $\boldsymbol{y}=-A_n^{-1}\boldsymbol{\alpha}$ 时, $f(\boldsymbol{x})$ 取到最小值 $a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}'A_n^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{|\boldsymbol{A}_n|}$.

8. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个互异的正实数, 试用两种方法证明: n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是正定阵, 其中 $a_{ij}=\frac{1}{a_i+a_j}$.

证明: 要证 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵, 只要证 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个顺序主子式全大于零即可. 注意到每个顺序主子式都与 $|A|$ 有相同的形状, 故只要证明 $|A|>0$ 即可. 由高代白皮书例 1.18 (Cauchy 行列式) 可得 $|\boldsymbol{A}|=\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_i-a_j)^2/\prod_{i,j=1}^n(a_i+a_j)>0$, 故结论得证. 另一种证法请参考 [问题 2019S11].

9. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶正定实对称阵, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 为 n 阶半正定实对称阵且主对角元全大于零, 证明: Hadamard 乘积 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=(a_{ij}b_{ij})$ 是正定实对称阵.

证明：因为 B 是半正定阵，故存在实矩阵 C，使得 $B=C'C$. 设 $C=(c_{ij})$，则 $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}c_{ki}c_{kj}$. 作二次型

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}x_ix_j=\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ij}\left(c_{ki}c_{kj}\right)x_ix_j\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\left(c_{ki}x_i\right)\left(c_{kj}x_j\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{y}_k'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_k$$

其中 $y_k=(c_{k1}x_1,c_{k2}x_2,\cdots,c_{kn}x_n)'$. 当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时，不妨设某个分量 $x_s\neq 0$. 由于 $0<b_{ss}=\sum_{k=1}^{n}c_{ks}^2$，故存在某个 $c_{rs}\neq 0$，于是 $\boldsymbol{y}_r$ 有一个分量 $c_{rs}x_s\neq 0$，从而 $\boldsymbol{y}_r\neq\boldsymbol{0}$. 因此由 $\boldsymbol{A}$ 的正定性可得 $f(\boldsymbol{x})>0$，于是 f 是正定型，从而 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 是正定阵.

10. (1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定实对称阵，证明：对任意的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，成立 $0\leq\boldsymbol{x}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'\right)^{-1}\boldsymbol{x}<1$，并求等于零的充要条件；进一步，对任意的 $\boldsymbol{B}\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$，成立 $0\leq\left|\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}\right|<1$，并求等于零的充要条件；

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶半正定实对称阵，证明：存在 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，使得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'$ 正定且 $\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}')^{-1}\boldsymbol{x}=1$ 的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$；进一步，存在 $\boldsymbol{B}\in M_{n\times m}(\mathbb{R})(n\geq m)$，使得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'$ 正定且 $\left|\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}\right|=1$ 的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-m$.

解：(1) 假设 $A+xx'$ 可逆，考虑如下对称分块初等变换：

$$\begin{pmatrix}A&O\\O&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&x\\O&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&O\\O&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&O\\x'&1\end{pmatrix}\to\tag{0.1}$$

$$\begin{pmatrix}A+xx'&x\\x'&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A+xx'&O\\O&1-x'\left(A+xx'\right)^{-1}\boldsymbol{x}\end{pmatrix}\tag{0.2}$$

$\boldsymbol{A}$ 正定，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'$ 也正定，从而由 (0.2) 式可知 $1-\boldsymbol{x}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'\right)^{-1}\boldsymbol{x}>0$，于是 $0\leq x'\left(A+xx'\right)^{-1}x<1$，因为 $A+xx'$ 正定，所以 $0=x'\left(A+xx'\right)^{-1}x<1$ 当且仅当 $x=0$.

假设 $A+BB'$ 可逆，考虑如下对称分块初等变换，其中第一步是将第二分块行左乘 B 加到第一分块行上，再将第二分块列右乘 $\boldsymbol{B}'$ 加到第一分块列上；第二步是用 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'$ 对称地消去同行同列的分块 B,B'：

$$\begin{pmatrix}A&O\\O&I_m\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A+BB'&B\\B'&\boldsymbol{I}_m\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A+BB'&O\\O&I_m-B'\left(A+BB'\right)^{-1}B\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 正定，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}B'$ 也正定，从而 $B'\left(A+BB'\right)^{-1}B$ 半正定. 由上式可知 $I_m-\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}B'\right)^{-1}\boldsymbol{B}$ 正定，于是由例 9.76 可得 $0\leq\left|\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}\right|<1$. 再由第 8 章解答题 6 可知，上述不等式左边等号成立的充要条件是 $r(B)<m$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 半正定，先证必要性：分别计算(0.2)两边分块对角矩阵的秩可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+1=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'\right)=n$，故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$. 再证充分性：由 $\boldsymbol{A}$ 半正定以及 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$ 可知，存在非异实矩阵 C，使得 $A=C\begin{pmatrix}I_{n-1}&O\\O&0\end{pmatrix}C'$. 令 $x=C\begin{pmatrix}O\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'$ 为正定阵，且 $\boldsymbol{x}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'\right)^{-1}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&1\end{pmatrix}C'\left(\boldsymbol{C}C'\right)^{-1}\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}\\1\end{pmatrix}=1$.

设 $\boldsymbol{A}$ 半正定, 先证必要性: 注意到 $\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}$ 半正定, 再由 (9.22) 式可知 $\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}$ 也半正定, 故 $B'\left(A+BB'\right)^{-1}B$ 的所有特征值都落在 $[0,1]$ 中. 又 $\left|B'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}B'\right)^{-1}B\right|=1$, 于是其所有特征值都等于 1 , 从而 $B'\left(A+BB'\right)^{-1}B=I_m$. 分别计算 (9.22) 式两边分块对角矩阵的秩可得 $r(\boldsymbol{A})+m=r\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)=n$, 故 $r(\boldsymbol{A})=n-m$. 再证充分性: 由 $\boldsymbol{A}$ 半正定以及 $r(\boldsymbol{A})=n-m$ 可知, 存在非异实矩阵 C, 使得 $A=C\begin{pmatrix} I_{n-m} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}C'$. 令 $B=C\begin{pmatrix} O \\ I_m \end{pmatrix}$, 则 $A+BB'=CC'$ 为正定阵, 且 $B'\left(A+BB'\right)^{-1}B=\begin{pmatrix} O & I_m \end{pmatrix}C'\left(CC'\right)^{-1}C\begin{pmatrix} O \\ I_m \end{pmatrix}=I_m$.