1. 用 Gram-Schmidt 方法求由下列向量张成的子空间的标准正交基.

(1) $\boldsymbol{u}_1=(0,1,-1)$, $\boldsymbol{u}_2=(0,-1,-3)$, $\boldsymbol{u}_3=(-1,-1,1)$;

(2) $\boldsymbol{u}_1=(-1,-1,0,2)$, $\boldsymbol{u}_2=(-1,0,0,1)$, $\boldsymbol{u}_3=(-1,0,1,1)$, $\boldsymbol{u}_4=(2,0,-1,-1)$;

(3) $\boldsymbol{u}_1=(0,0,2,3,1)$, $\boldsymbol{u}_2=(0,1,0,-2,2)$, $\boldsymbol{u}_3=(1,0,1,1,-2)$, $\boldsymbol{u}_4=(0,0,-1,3,-2)$, $\boldsymbol{u}_5=(-1,-1,-2,0,-1)$;

2. 在欧氏空间 $\mathbf{R}^4$ 里写出两个单位向量, 使它同时与向量 $\alpha=(2,1,-4,0)$, $\beta=(-1,-1,2,2)$, $\gamma=(3,2,5,4)$ 正交.

3. 在欧氏空间 $C[-1,1]$ 里, 对 $\{1,x,x^2,\ x^3\}$ 实施 Gram-Schmidt 正交化方法, 求出一个标准正交向量组.

4. 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_3+x_4=0 \\ x_2-x_4=0 \end{cases}$$

(1) 求该方程组的解空间的的一个标准正交基;

（2）求与该方程组的解空间中向量都正交的全部向量.

5. 令 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一个标准正交基, 又令

$$K=\left\{\xi\in V\mid \xi=\sum_{i=1}^{n}x_i\gamma_i,\quad 0\leqslant x_i\leqslant 1, i=1,2,\cdots,n\right\},$$

K 叫做一个 n-方体. 如果每个 x_i 都等于 0 或 1, 则 ξ 就叫做 K 的一个顶点. K 的顶点间一切可能的距离是多少?

6. 设 n 是正整数. 证明 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ldots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ldots,\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$ 是 $C[-\pi,\pi]$ 中的标准正交向量组, 其中 $C[-\pi,\pi]$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上由连续实值函数组成的向量空间, 其有内积 $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$.

7. 设 a 为正实数, 证明下列 n 阶实对称阵为正定阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & \frac{a^2}{2} & \frac{a^3}{3} & \cdots & \frac{a^n}{n} \\ \frac{a^2}{2} & \frac{a^3}{3} & \frac{a^4}{4} & \cdots & \frac{a^{n+1}}{n+1} \\ \frac{a^3}{3} & \frac{a^4}{4} & \frac{a^5}{5} & \cdots & \frac{a^{n+2}}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{a^n}{n} & \frac{a^{n+1}}{n+1} & \frac{a^{n+2}}{n+2} & \cdots & \frac{a^{2n-1}}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

8. 设 n 维欧氏空间 V 中 $n+1$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 两两之间的距离都是 $d>0$. 令 $\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\alpha}_i-\boldsymbol{\alpha}_0(1\le i\le n)$, 证明:

(1) $\left(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j\right)=\frac{d^2}{2}(1\le i\ne j\le n)$; (2) $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是 V 的一组基.

9. 向量组 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$,$\cdots$, $\boldsymbol{v_m}$ 张成的平行 $2m$ 面体的体积等于其 Gram 矩阵的行列式的算术平方根，即

$$V(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v_m})=|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v_m})|^{\frac{1}{2}}.$$

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 是 n 维欧氏空间 V 中两两夹角大于直角的 $n+1$ 个向量, 证明:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中任意 n 个向量必线性无关;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中任一向量必为其余向量的负系数线性组合.