1. 用 Gram-Schmidt 方法求由下列向量张成的子空间的标准正交基.

(1) $\boldsymbol{u}_1 = (0,1,-1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (0,-1,-3)$, $\boldsymbol{u}_3 = (-1,-1,1)$;

(2) $\boldsymbol{u}_1 = (-1,-1,0,2)$, $\boldsymbol{u}_2 = (-1,0,0,1)$, $\boldsymbol{u}_3 = (-1,0,1,1)$, $\boldsymbol{u}_4 = (2,0,-1,-1)$;

(3) $\boldsymbol{u}_1 = (0,0,2,3,1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (0,1,0,-2,2)$, $\boldsymbol{u}_3 = (1,0,1,1,-2)$, $\boldsymbol{u}_4 = (0,0,-1,3,-2)$, $\boldsymbol{u}_5 = (-1,-1,-2,0,-1)$;

2. 在欧氏空间 $\mathbf{R}^4$ 里写出两个单位向量, 使它同时与向量 $\alpha = (2,1,-4,0)$, $\beta = (-1,-1,2,2)$, $\gamma = (3,2,5,4)$ 正交.

解设 $\xi = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ 与 α,β,γ 正交, 则有方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \end{cases}$$

解得 $\xi = (-34, 14, -6, 11)$, 单位化得

$$n = \frac{\xi}{|\xi|} = \frac{1}{57}(-34, 44, -6, 11)$$

3. 在欧氏空间 $C[-1,1]$ 里, 对 $\{1, x, x^2,\ x^3\}$ 实施 Gram-Schmidt 正交化方法, 求出一个标准正交向量组.

解令 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = x, \alpha_3 = x^2, \alpha_4 = x^4$.

为得到规范化正交组, 先取 $\beta_1 = \alpha_1 = 1$. 有

$$\langle \beta_1, \beta_1 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \ \mathrm{d}x = 2.$$

因为

$$\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x \ \mathrm{d}x = 0,$$

所以

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \cdot \beta_1 = x.$$

因为

$$\langle \beta_2, \beta_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 \ \mathrm{d}x = \frac{2}{3},$$

所以 $\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \cdot \beta_1 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle} \cdot \beta_2 = x^2 - \frac{1}{3}$.

又因为 $\langle \beta_3, \beta_3 \rangle = \int_{1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 \ \mathrm{d}x = \frac{8}{45}$,

$$\langle \alpha_4, \beta_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3 \ \mathrm{d}x = 0, \quad \langle \alpha_4, \beta_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3 \cdot x \ \mathrm{d}x = \frac{2}{5},$$

$$\langle \alpha_4, \beta_3 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \mathrm{d}x = 0,$$

所以 $\beta_4=\alpha_4-\frac{\langle\alpha_4,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\cdot\beta_1-\frac{\langle\alpha_4,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\cdot\beta_2-\frac{\langle\alpha_4,\beta_3\rangle}{\langle\beta_3,\beta_3\rangle}\cdot\beta_3$

$$=x^3-\frac{3}{5}x.$$

最后将 $\beta_i(i=1,2,3,4)$ 单位化得

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \gamma_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{\sqrt{6}}{2}x,$$
$$\gamma_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\frac{\sqrt{10}}{4}\left(3x^2-1\right),\quad \gamma_4=\frac{\beta_4}{|\beta_4|}=\frac{\sqrt{14}}{4}\left(5x^3-3x\right).$$

$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 是一个规范正交组.

4. 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_3+x_4=0 \\ x_2-x_4=0 \end{cases}$$

(1) 求该方程组的解空间的的一个标准正交基;

（2）求与该方程组的解空间中向量都正交的全部向量.

5. 令 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一个标准正交基, 又令

$$K=\left\{\xi\in V\mid \xi=\sum_{i=1}^{n}x_i\gamma_i,\quad 0\leqslant x_i\leqslant 1, i=1,2,\cdots,n\right\},$$

K 叫做一个 n-方体. 如果每个 x_i 都等于 0 或 1, 则 ξ 就叫做 K 的一个顶点. K 的顶点间一切可能的距离是多少?

解设 $\xi=\sum_{i=1}^{n}x_i\gamma_i,\eta=\sum_{j=1}^{n}y_i\gamma_j$ 是 K 的任意两个顶点, 则它们之间的距离是

$$d(\xi,\eta)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-y_i\right)^2}$$

于是顶点 $(1,1,\cdots,1)$ 与下列诸顶点

$$(\underbrace{1,\cdots,1}_{i\uparrow},0,\cdots,0),\quad i=0,1,2,\cdots,n-1,n$$

的距离分别是 $\sqrt{n},\sqrt{n-1},\cdots,\sqrt{2},1,0$. 又因为 x_i,y_j 只取 0 或 1 , 故 $\left(x_i-y,\right)^2=0$ 或 1 , 所以任意两顶点间的距离不外取上面那些值, 故 K 的顶点之间一切可能距离是 $\sqrt{n},\cdots,\sqrt{2},1,0$.

6. 设 n 是正整数. 证明 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ldots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ldots,\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$ 是 $C[-\pi,\pi]$ 中的标准正交向量组, 其中 $C[-\pi,\pi]$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上由连续实值函数组成的向量空间, 其有内积 $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$.

7. 设 a 为正实数, 证明下列 n 阶实对称阵为正定阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & \frac{a^2}{2} & \frac{a^3}{3} & \cdots & \frac{a^n}{n} \\ \frac{a^2}{2} & \frac{a^3}{3} & \frac{a^4}{4} & \cdots & \frac{a^{n+1}}{n+1} \\ \frac{a^3}{3} & \frac{a^4}{4} & \frac{a^5}{5} & \cdots & \frac{a^{n+2}}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{a^n}{n} & \frac{a^{n+1}}{n+1} & \frac{a^{n+2}}{n+2} & \cdots & \frac{a^{2n-1}}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

证明：设 $V=C[0,a]$ 为 $[0,a]$ 区间上的连续函数全体构成的欧氏空间，其内积定义为 $(f(x),g(x))=\int_0^a f(x)g(x)\mathrm{d}x$. 容易验证 $\{1,x,\cdots,x^{n-1}\}$ 是 V 中一组线性无关的向量, 且 $\boldsymbol{A}$ 为其 Gram 矩阵. 由高代白皮书例 9.5 可知 $\boldsymbol{A}$ 为正定阵.

8. 设 n 维欧氏空间 V 中 $n+1$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 两两之间的距离都是 $d>0$. 令 $\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\alpha}_i-\boldsymbol{\alpha}_0(1\le i\le n)$, 证明:

(1) $\left(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j\right)=\frac{d^2}{2}(1\le i\ne j\le n)$; (2) $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是 V 的一组基.

证明: (1) 显然 $\|\boldsymbol{\beta}_i\|=\|\boldsymbol{\alpha}_i-\boldsymbol{\alpha}_0\|=d(1\le i\le n)$, 又对任意的 $i\ne j, d^2=\|\boldsymbol{\alpha}_i-\boldsymbol{\alpha}_j\|^2=\left\|\boldsymbol{\beta}_i-\boldsymbol{\beta}_j\right\|^2=\|\boldsymbol{\beta}_i\|^2+\left\|\boldsymbol{\beta}_j\right\|^2-2\left(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j\right)$, 故 $\left(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j\right)=d^2/2(1\le i\ne j\le n)$. (2) 注意到 $\beta_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的 Gram 矩阵 $G=G\left(\beta_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\right)$ 的主对角元全为 d^2, 其余元素全为 $d^2/2$, 用求和法可计算出 $|\boldsymbol{G}|=(n+1)d^{2n}/2^n>0$, 故由例 9.5 可知, $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关, 从而是 V 的一组基.

9. 证明向量组 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$,$\cdots$, $\boldsymbol{v_m}$ 张成的平行 $2m$ 面体的体积等于其 Gram 矩阵的行列式的算术平方根，即

$$V(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v_m})=|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v_m})|^{\frac{1}{2}}.$$

证明：将 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$,$\cdots$, $\boldsymbol{v_m}$ 实施 Gram-Schmidt 正交化可得

$$(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v_m})=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u_m})\boldsymbol{B}$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 是一个主对角全为 1 的上三角阵. 由 $2m$ 面体的体积的计算可知,$V=\|\boldsymbol{u}_1\|\|\boldsymbol{u}_2\|\cdots\|\boldsymbol{u_m}\|$, 由小白书例 9.15 可知，

$$|G(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v_m})|=|G(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u_m})|=\|\boldsymbol{u}_1\|^2\|\boldsymbol{u}_2\|^2\cdots\|\boldsymbol{u_m}\|^2$$

因此，可得上述结论.

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 是 n 维欧氏空间 V 中两两夹角大于直角的 $n+1$ 个向量, 证明:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中任意 n 个向量必线性无关;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中任一向量必为其余向量的负系数线性组合.

证明: (1) 用反证法证明. 假设存在 n 个向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_n$ 线性相关, 其中 $\boldsymbol{\beta}_i$ 表示从 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中挑选的 n 个向量，剩余的一个向量记为 $\boldsymbol{\beta}_{n+1}$. 则存在不全为零的实数 $c_1,c_2,\cdots,c_{n+1}$, 使得 $c_1\boldsymbol{\beta}_1+c_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{\beta}_n=\mathbf{0}$. 将此式按照系数正负整理为如下形式:

$$\sum_{c_i>0}c_i\boldsymbol{\beta}_i=\sum_{c_j<0}\left(-c_j\right)\boldsymbol{\beta}_j$$

由 $c_1,c_2,\cdots,c_{n+1}$ 不全为零不妨设存在某个 $c_i>0$. 若上式两边都等于零, 则有

$$0=\left(\sum_{c_i>0}c_i\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_{n+1}\right)=\sum_{c_i>0}c_i\left(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_{n+1}\right)<0$$

矛盾. 因此若上述等式两边都非零, 从而也存在某个 $c_j<0$, 于是

$$0<\left(\sum_{c_i>0}c_i\boldsymbol{\beta}_i,\sum_{c_i>0}c_i\boldsymbol{\beta}_i\right)=\left(\sum_{c_i>0}c_i\boldsymbol{\beta}_i,\sum_{c_j<0}\left(-c_j\right)\boldsymbol{\beta}_j\right)=\sum_{c_i>0}\sum_{c_j<0}c_i\left(-c_j\right)\left(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j\right)<0,$$

矛盾. 结论得证.

（2）任选向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$, 由 (1) 知剩余向量线性无关，因此向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可表示为 $\boldsymbol{\alpha}_i = c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + c_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1} + c_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \cdots + c_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \sum_{c_k>0} c_k\boldsymbol{\alpha}_k + \sum_{c_j<0} c_j\boldsymbol{\alpha}_j$. 可得等式

$$\sum_{c_k>0} c_k\boldsymbol{\alpha}_k = \boldsymbol{\alpha}_i + \sum_{c_j<0}(-c_j)\boldsymbol{\alpha}_j = \sum_{c_j<0}(-c_j)\boldsymbol{\alpha}_j$$

不妨设 $\exists\, k,\, c_k > 0$,

$$0 < \left(\sum_{c_k>0} c_k\boldsymbol{\alpha}_k, \sum_{c_k>0} c_k\boldsymbol{\alpha}_k\right) = \left(\sum_{c_k>0} c_k\boldsymbol{\alpha}_k, \sum_{c_j<0}\left(-c_j\right)\boldsymbol{\alpha}_j\right) = \sum_{c_k>0}\sum_{c_j<0} c_k\left(-c_j\right)\left(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\alpha}_j\right) < 0,$$

矛盾. 结论得证.