1. 求下列矩阵的 QR 分解:

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; (3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. 求出正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵:

(i) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$; (ii) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$.

3. 设 V 是 n 维欧氏空间, $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是标准正交基, 证明 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 是正交向量组的充要条件是对任意 $1\leqslant i\neq j\leqslant m$ 有 $\sum_{t=1}^{n}\langle\alpha_i,\varepsilon_t\rangle\langle\alpha_j,\varepsilon_t\rangle=0$.

4. 设 T 为欧氏空间 V^n 的反对称变换, 即

$$(Tx,y)=-(x,Ty)\quad (x,y\in V^n).$$

证明: T 是反对称变换的充要条件是 T 在 V^n 的任一组标准正交基下的表示矩阵为反对称阵.

5. 设欧氏空间 V^n 的正交变换 T 的特征值都是实数, 证明: 存在 V^n 的标准正交基, 使得 T 在该基下的矩阵为对角阵.

6. 设欧氏空间 V^n 的基 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 的度量矩阵为 $\boldsymbol{G}$, 设线性变换 T 在这组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 求 T 是正交变换的充要条件.

7. 设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 是欧氏空间 V 中的向量，其 Gram 矩阵为 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

试求 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 的一组极大无关组，以及由这一极大无关组通过 Gram-Schmidt 方法得到的标准正交向量组.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正交阵，求证：$\boldsymbol{A}$ 中不存在元素皆为 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 的三阶子矩阵.

9. 设欧氏空间 V^n 的两个标准正交基为

$$\text{(I)}: x_1,x_2,\cdots,x_n;\text{(II)}\ : y_1,y_2,\cdots,y_n.$$

正交变换 T 满足 $Tx_1=y_1$, 证明:

$$\mathrm{L}(Tx_2,\cdots,Tx_n)=\mathrm{L}(y_2,\cdots,y_n).$$