1. 求下列矩阵的 QR 分解:

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\2&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}$; (2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&-2\\0&-1&2\end{pmatrix}$; (3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&-2\\4&0&1\\-1&3&2\end{pmatrix}$.

2. 求出正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵:

(i) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}11&2&-8\\2&2&10\\-8&10&5\end{pmatrix}$; (ii) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}17&-8&4\\-8&17&-4\\4&-4&11\end{pmatrix}$.

解 (i) $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda+9)(\lambda-9)(\lambda-18)$, A 的属于 $\lambda_1=-9,\lambda_2=9,\lambda_3=18$ 的特征向量分别是

$$\xi_1=(1,-2,2),\quad \xi_2=(2,2,1),\quad \xi_3=(2,-1,-2),$$

由教材中定理 8.4 .4 知, 它们彼此正交. 单位化得

$$\eta_1=\frac{1}{3}(1,-2,2),\quad \eta_2=\frac{1}{3}(2,2,1),\quad \eta_3=\frac{1}{3}(2,-1,-2),$$

于是有

$$U=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\-2&2&-1\\2&1&-2\end{pmatrix}.$$

(ii) $\det(\lambda I-\boldsymbol{A})=(\lambda-9)(\lambda-9)(\lambda-27)$, A 的属于 $\lambda_1=9,\lambda_2=9,\lambda_3=27$ 的特征向量行别是

$$\xi_1=(3,3,0),\quad \xi_2=(1,-1,-4),\quad \xi_3=(2\sqrt{2},-2\sqrt{2},\sqrt{2}),$$

并且两两正交, 单位化得

$$\eta_1=\frac{1}{3\sqrt{2}}(3,3,0),\quad \eta_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}(1,-1,-4),$$
$$\eta_3=\frac{1}{3\sqrt{2}}(2\sqrt{2},-2\sqrt{2},\sqrt{2}),$$
$$U=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3&1&2\sqrt{2}\\3&-1&-2\sqrt{2}\\0&-4&\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

3. 设 V 是 n 维欧氏空间, $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是标准正交基, 证明 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 是正交向量组的充要条件是对任意 $1\leqslant i\neq j\leqslant m$ 有 $\sum_{t=1}^{n}\langle\alpha_i,\varepsilon_t\rangle\langle\alpha_j,\varepsilon_t\rangle=0$.

证因为 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是标准正交基. 所以 $\alpha_i=\sum_{r=1}^{n}\langle\alpha_i,\varepsilon_s\rangle\varepsilon_s, i=1,\cdots,n$. 因此

$$\begin{aligned}\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle&=\left\langle\sum_{s=1}^{n}\langle\alpha_i,\varepsilon_s\rangle\varepsilon_{\mathrm{s}},\sum_{t=1}^{n}\langle\alpha_j,\varepsilon_t\rangle\varepsilon_t\right\rangle\\&=\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\langle\langle\alpha_i,\varepsilon_s\rangle\varepsilon_s,\langle\alpha_j,\varepsilon_t\rangle\varepsilon_t\rangle\\&=\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\langle\alpha_i,\varepsilon_s\rangle\langle\alpha_j,\varepsilon_t\rangle\langle\varepsilon_s,\varepsilon_t\rangle\\&=\sum_{t=1}^{n}\langle\alpha_i,\varepsilon_t\rangle\langle\alpha_j,\varepsilon_t\rangle,\end{aligned}$$

所以 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 是正交向量组当且仅当对任意脚标 $1\leqslant i\neq j\leqslant m$ 有 $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=0$ 当且仅当对任意脚标 $1\leqslant i\neq j\leqslant m$ 有 $\sum^{n}\langle\alpha_2,\varepsilon_t\rangle\langle\alpha_j,\varepsilon_t\rangle=0$.

4. 设 T 为欧氏空间 V^n 的反对称变换, 即

$$(Tx,y)=-(x,Ty)\quad(x,y\in V^n).$$

证明: T 是反对称变换的充要条件是 T 在 V^n 的任一组标准正交基下的表示矩阵为反对称阵.

证设 V^* 的一个标准正交基为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 线性变换 T 在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, 即

$$T(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)A$$

则有

$$Tx_i=a_{1i}x_1+a_{2i}x_2+\cdots+a_{ni}x_n,\quad(Tx_i,x_j)=a_{ji}$$

$$Tx_j=a_{1j}x_1+a_{2j}x_2+\cdots+a_{nj}x_n,\quad(x_i,Tx_j)=a_{ij}$$

必要性. 设 T 是反对称变换, 则有 $(Tx_i,x_j)=-(x_i,Tx_j)$, 即 $a_{ji}=-a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$, 故 $\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$. 充分性, 设 $A^{\top}=-A$, 则对任意的 $x,y\in V^n$ 有

$$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\begin{bmatrix}\xi_1\\\vdots\\\xi_n\end{bmatrix},\quad T\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{bmatrix}\xi_1\\\vdots\\\xi_n\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}=(x_1,\cdots,x_n)\begin{bmatrix}\eta_1\\\vdots\\\eta_n\end{bmatrix},\quad Ty=(x_1,\cdots,x_n)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\eta_h\\\vdots\\\eta_n\end{bmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,x_n$ 是标准正交基, 所以

$$(T\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\eta_{\mathrm{n}}\\\vdots\\\eta_n\end{bmatrix}=$$

$$-(\xi_1,\cdots,\xi_n)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\eta_1\\\vdots\\\eta_n\end{bmatrix}=-(\boldsymbol{x},T\boldsymbol{y})$$

故 T 是反对称变换.

5. 设欧氏空间 V^n 的正交变换 T 的特征值都是实数, 证明: 存在 V^n 的标准正交基, 使得 T 在该基下的矩阵为对角阵.

证设 V^n 的一个标准正交基为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 正交变换 T 在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵, 也是实的正规矩阵. 因为 T 的特征值都是实数, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是实数（书本定理 9.7.4）. 于是存在正交矩阵 Q, 使得

$$Q^{\top} \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Lambda}$$

其中 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 令

$$(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) Q$$

则 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 V^n 的标准正交基，且 T 在该基下的矩阵为

$$Q^{-1} A Q = Q^{\mathrm{T}} A Q = \boldsymbol{\Lambda}$$

6. 设欧氏空间 V^n 的基 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 的度量矩阵为 $\boldsymbol{G}$, 设线性变换 T 在这组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 求 T 是正交变换的充要条件.

证必要性：因为 T 是正交变换, 所以 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵. 由

$$(T x_1, T x_2, \cdots, T x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) A$$

知, $T x_1, T x_2, \cdots, T x_n$ 是 V^n 的一个基, 它的度量矩阵为 $A^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G} \boldsymbol{A}$. 再由 T 是正交变换可得

$$(T x_i, T x_j) = (x_i, x_j) \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

这表明, 基 $T\boldsymbol{x}_1, T\boldsymbol{x}_2, \cdots, T\boldsymbol{x}_n$ 的度量矩阵也是 G. 因此 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{G}$.

充分性：由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{G}$，可得

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G} \boldsymbol{A})_{ij} = (\boldsymbol{G})_{ij} = (T x_i, T x_j) = (x_i, x_j) \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

则得到结论.

7. 设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 是欧氏空间 V 中的向量，其 Gram 矩阵为 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A}' \boldsymbol{A}$, 其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

试求 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 的一组极大无关组，以及由这一极大无关组通过 Gram-Schmidt 方法得到的标准正交向量组.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正交阵，求证：$\boldsymbol{A}$ 中不存在元素皆为 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 的三阶子矩阵.

证明反证法，假设存在，则对应子阵特征值为 $\frac{3}{2\sqrt{2}} > 1, 0, 0$. 由小白书例 9.46 知矛盾，因此得到结论.

9. 设欧氏空间 V^n 的两个标准正交基为

$$\text{(I)}: x_1, x_2, \cdots, x_n; \text{(II)} \ : y_1, y_2, \cdots, y_n.$$

正交变换 T 满足 $T x_1 = y_1$, 证明:

$$\mathrm{L}(T x_2, \cdots, T x_n) = \mathrm{L}(y_2, \cdots, y_n).$$

证因为 T 是正交变换, 所以 $Tx_1,Tx_2,\cdots,Tx_n$ 是 V^n 的标准正交基. 设由基 (II) 改变为基 $Tx_1,Tx_2,\cdots,Tx_y$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$, 即

$$(Tx_1,Tx_2,\cdots,Tx_n)=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\,B$$

则 B 是正交矩阵. 由 $Tx_1=y_1$ 知

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{m} \end{bmatrix}$$

再由 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$ 可得 $\mathrm{l}^2+b_{12}^2+\cdots+b_{1n}^2=1$, 即 $b_{12}=\cdots=b_{1n}=0$, 从而有

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2\pi} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{m} \end{bmatrix}$$

于是可得

$$T\boldsymbol{x}_j=b_{2j}\boldsymbol{y}_2+b_{3j}\boldsymbol{y}_3+\cdots+b_{nj}\boldsymbol{y}_n \quad (j=2,3,\cdots,n)$$

因此 $\quad \mathrm{L}\,(Tx_2,\cdots,Tx_n)\subset\mathrm{L}\,(y_2,\cdots,y_n)$ 注意到 $\dim L\,(T\boldsymbol{x}_2,\cdots,T\boldsymbol{x}_n)=n-1=\dim L\,(\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n)$. 令 C 为 B 右下角的子矩阵，显然 B 为正交阵，由上可得

$$(Tx_2,\cdots,Tx_n)=(y_2,\cdots,y_n)\,C,(Tx_2,\cdots,Tx_n)\,C^T=(y_2,\cdots,y_n)$$

由此得证.