1. 求出正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵:

(i) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$; (ii) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&4&3\\4&5&3\\3&3&2\end{pmatrix}$; (iii) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&0&-6\\0&1&0\\-6&0&9\end{pmatrix}$.

2. 设二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$ 通过正交变换化为 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$, 求 a 和所用的正交变换.

3. 设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ 及 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_k$ 是欧氏空间 V 中两组向量. 证明: 存在 V 上的正交变换 φ, 使

$$\varphi\left(\boldsymbol{x}_i\right)=\boldsymbol{y}_i(i=1,2,\cdots,k)$$

成立的充分必要条件是这两组向量的 Gram 矩阵相等.

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实方阵满足 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}$, 求证存在正交矩阵 $\boldsymbol{O}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}\boldsymbol{A}$.

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实正交方阵, 证明: $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$ 当且仅当 $n-r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$ 为偶数.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是欧式空间 V 上的正交变换, 且 $\det\boldsymbol{A}=1$. 求证存在 V 上的正交变换 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称阵, 证明: $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同特征值的充要条件是, 对 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 λ_0 及对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 矩阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\lambda_0 I_n & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}' & 0\end{pmatrix}$$

均非异.

8. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶正定实对称阵, 证明:

$$\frac{2^{n+1}}{|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|}\leq\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}+\frac{1}{|\boldsymbol{B}|}$$

且等号成立的充分必要条件为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

9. 求证 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$.

10. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为 n 阶实对称阵, 请用实对称阵的正交相似标准型理论证明:

$$\operatorname{tr}\left((\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})^2\right)\leq\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^2\boldsymbol{B}\right),$$

并求等号成立的充分必要条件.