1. 请用多元多项式的整性证明: 数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵全体构成的线性空间 $M_n(\mathbb{K})$ 有一组 (无穷组) 由非异矩阵构成的基.

2. 设数域 $\mathbb{K}$ 上的二元多项式 $f(x,y)$ 关于 x 的次数小于等于 n, 关于 y 的次数小于等于 m. 设 $\mathbb{K}$ 中存在两组互不相同的数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 和 $b_0,b_1,\cdots,b_m$, 使得

$$f(a_i,b_j)=0,\quad 0\le i\le n, 0\le j\le m,$$

证明: $f(x,y)$ 是零多项式.

3. 已知对任意的 t, 有

$$f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)=t^r f(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

证明: $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个 r 次齐次多项式.

4. 设 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 为多项式 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的 n 个根，证明: $x_2,\ldots,x_n$ 的任一对称多项式均可表示为 x_1 与 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 的多项式.

5. 利用 Newton 公式将 s_4 用初等对称多项式表示出来.

6. 把 n 元对称多项式 $f=\sum_{i\neq j}x_i^3x_j$ 表示为初等对称多项式的多项式.

7. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 n 个复数, 满足:

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=r\\ \lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2=r\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \lambda_1^n+\lambda_2^n+\cdots+\lambda_n^n=r\\ \lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}+\cdots+\lambda_n^{n+1}=r\end{cases}$$

其中 $r\in[0,n]$ 为整数. 请用 Newton 公式证明: $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中有 r 个 1, $n-r$ 个 0 .

8. (1) 请将下列对称有理函数表示为初等对称多项式的有理函数, 并求 $\sigma_1=0$ 时的函数值:

$$Q(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_1^2}{2x_1^2+x_2x_3}+\frac{x_2^2}{2x_2^2+x_3x_1}+\frac{x_3^2}{2x_3^2+x_1x_2}$$

(2) 请将下列对称有理函数表示为初等对称多项式的有理函数, 并求 $\sigma_1=2$, $\sigma_2=-6$, $\sigma_3=1$ 时的函数值:

$$Q(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{x_1x_2+2x_3}+\frac{1}{x_2x_3+2x_1}+\frac{1}{x_3x_1+2x_2}.$$

9. 已知多项式 $f(x)=x^2+(k+6)x+(4k+2)$ 和 $g(x)=x^2+(k+2)x+2k$ 的结式 $R(f,g)=0$, 求 k 的值。

10. 设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的多项式，已知 $\Delta(f(x))$, 试求 $\Delta(f(x^2))$.