1. 求下列矩阵的特征值和相应的特征向量:

(i) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -5 & 7 & -1 \end{pmatrix}$; (ii) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & -12 & -6 \end{pmatrix}$.

2. 已知向量 $\mathbf{x} = (1, k, 1)'$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵的特征向量，求 k.

3. 设 A 为 3 阶矩阵, 其特征值为 $1, -1, 2$. 求 (1) 行列式 $|A - 5I|$. (2) $(A^*)^2 + I$ 的特征值.

4. 设 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 其中 $a_{ij} = |i - j|$, 求 $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.

5. 设 $\mathcal{V} = M_n(\mathbb{C})$ 是 n 阶复方阵全体构成的集合.

(1) 将 $\mathcal{V}$ 看成是复线性空间, $\mathcal{V}$ 上的线性变换 φ 定义为 $\varphi(X) = JX$, 其中 J 是基础循环矩阵 (高代白皮书例 2.1), 试求 φ 的全体特征值和对应的特征向量;

(2) 将 $\mathcal{V}$ 看成是实线性空间, $\mathcal{V}$ 上的线性变换 φ 定义为 $\varphi(X) = \overline{X}$, 其中 $\overline{X}$ 是 X 的共轭矩阵, 试求 φ 的全体特征值和对应的特征向量.

6. 证明: 对角形矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

相似的充分必要条件是 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个排列.

7. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 设 $g(\lambda) = |\lambda I_n - B|$ 是 B 的特征多项式, 证明矩阵 $g(A)$ 可逆的充要条件是 A 和 B 没有公共的特征值.

8. 设 n 阶方阵 A 的所有元素都是整数, 其中阶数 n 为偶数, 并且对任意的 $1 \le r \le n$, A 的所有 r 主子式之和都是奇数. 证明: 不存在整数 k, 使得线性方程组 $A\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{x}$ 有非零解.

9. 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 并且存在 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵 B, 使得 $AB - BA = aI_n + A$, 其中 $a \in \mathbb{K}$, 试求 A 的特征多项式.

10. 设 A, B 为 n 阶方阵, 满足: $A^2 - 2AB + B^2 = 0$.

(1) 若 $n = 2$, 证明: $AB = BA$;

(2) 若 $n \ge 3$, 举例说明: $AB = BA$ 不一定成立.