1. 求可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 是对角阵:

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-4&4\\1&-2&2\end{pmatrix}$; (2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j=j\boldsymbol{\alpha}_j(j=1,2,3)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)',\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-2,1)'$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,2)'$, 试求 $\boldsymbol{A}$.

3. 设方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a&a&0\\a-2&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ 可对角化, 求 a 的值.

4. 问 a,a_1,a_2,b,b_1,c 满足什么条件时下述矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵?

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\a&1&0&0\\a_1&b&2&0\\a_2&b_1&c&2\end{pmatrix}$$

5. 设 n 阶复方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&\cdots&b\\c&a&&\\\vdots&&\ddots&\\c&&&a\end{pmatrix}$, 试求 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件.

6. 设 $n(n>1)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1 , 求证: $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\neq 0$.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复方阵, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&-\boldsymbol{A}^2\\\boldsymbol{A}^2&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}$ 为 $2n$ 阶复方阵. 证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 则 $\boldsymbol{B}$ 也可对角化.

8. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{C}$, 证明下列矩阵可对角化:

$$A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\-a_n&a_1&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&a_2\\-a_2&\cdots&-a_n&a_1\end{pmatrix}$$

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, $f(x),g(x)$ 为 $\mathbb{K}$ 上互素的多项式, 且它们在 $\mathbb{C}$ 中均无重根. 证明: 若 $r(f(\boldsymbol{A}))+r(g(\boldsymbol{A}))=n$, 则 $\boldsymbol{A}$ 复可对角化.

10. 设 n 阶复方阵 $\boldsymbol{M}$ 的秩等于 2 , 请用 $\boldsymbol{M}$ 的特征值的相关条件给出 $\boldsymbol{M}$ 可对角化的充分必要条件.