1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$. 求矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&y\end{pmatrix}$ 相似, (1) 求 x,y 的值. (2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\1&1&1&0\\0&-1&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$, 试将 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 表示为 $\boldsymbol{A}$ 的三次多项式.

4. 设 n 阶复方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$, 求证: $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 经过适当的排序后, 可满足 $\lambda_i+\mu_i=\lambda_i\mu_i(1\le i\le n)$. 特别地, $\boldsymbol{A}$ 是幂零阵当且仅当 $\boldsymbol{B}$ 是幂零阵.

5. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{AB}$ 都是 n 阶实对称阵, 证明: 若 s 是 $\boldsymbol{AB}$ 的一个特征值, 则存在 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_0 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 μ_0, 使得 $s=\lambda_0\mu_0$.

6. 设 S 是某些 n 阶方阵构成的集合, 满足如下条件:

(1) $\boldsymbol{I}_n\in S$;

(2) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in S$, 则 $\boldsymbol{AB}\in S$;

(3) 对任意的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in S,(\boldsymbol{AB})^3=\boldsymbol{BA}$ 成立.

证明: S 中的矩阵可以同时对角化, 并且 S 是有限集合.

7. (1) 若 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I_n}$, 则称为正交阵. 证明正交阵的特征值是模长等于 1 的复数.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶正交阵且 $|\boldsymbol{A}|=1$, 求证: 存在实数 $t\in[-1,3]$, 使得

$$\boldsymbol{A}^3-t\boldsymbol{A}^2+t\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_3=\boldsymbol{O}.$$

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 证明: 若下列条件之一成立, 则矩阵方程 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{X}$ 只有零解:

(1) $\boldsymbol{A}$ 为幂零阵, 即存在正整数 m, 使得 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$;

(2) $\boldsymbol{A}$ 的所有元素都为 1 ;

(3) $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为偶数;

9. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 适合多项式 $f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 其中 $|a_m|>\sum_{i=0}^{m-1}|a_i|$. 证明: 矩阵方程 $2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}^2$ 只有零解.

10. 设 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足: $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值都大于零, 且 $\boldsymbol{A}^4+2\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{AB}^3+\boldsymbol{B}^4$, 证明: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.