1. 试求 $\lambda I - A$ 的法式, 其中 $\boldsymbol{A}$ 为

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\3&2&0\\0&1&4\end{pmatrix}$, (2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&4&0\\-1&1&0\end{pmatrix}$.

2. 判断下列矩阵是否相似:

(1) $\begin{pmatrix}i&0\\0&i\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}3&2&0\\2&6&1\\1&2&-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}6&2&-3\\6&2&-1\\4&0&-3\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\-4&-4&-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\\-1&1&2\end{pmatrix}$.

3. 求下列矩阵的行列式因子与不变因子:

(1) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\-1&-2&0\end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix}0&1&2&-1\\6&2&1&0\\0&4&1&-1\\5&6&-4&1\end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\-2&-2&1\end{pmatrix}$, (4) $\begin{pmatrix}4&5&-2\\-2&-2&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复方阵, $f(x)\in\mathbb{C}[x]$, 证明: $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&f(\boldsymbol{A})\\f(\boldsymbol{A})&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}$ 可对角化.

5. 设 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 阶行列式因子是一个 $n-2$ 次多项式, 试求 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组及其有理标准型.

6. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, φ 是 V 上的线性变换. 证明: 若 φ 有 r 维不变子空间, 则 φ 必有 $n-r$ 维不变子空间.

7. 设数域 $\mathbb{K}$ 上的三阶矩阵 A,B,C,D 具有相同的特征多项式, 证明: 其中必有两个矩阵在 $\mathbb{K}$ 上相似.

8. 设 V 为 n 阶复方阵全体构成的线性空间, V 上的线性变换 φ 定义为 $\varphi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XA}'$, 其中 $\boldsymbol{A}\in V$. 请用矩阵的 Kronecker 积证明：若 A 可对角化，则 φ 也可对角化.