1. 已知 5 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组如下, 求 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准型:

(1) $1, \lambda-2, \lambda-2, \lambda-2,(\lambda-2)^2$.

(2) $1, \lambda, \lambda, \lambda, \lambda(\lambda-1)$.

(3)$1,1,1,(\lambda-2)(\lambda-3),(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$.

(4)$1,1,1, \lambda+1, \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)^2$.

2. 已知 5 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组如下, 求 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组和极小多项式:

(1) $\lambda+5, \lambda+5, \lambda+5, \lambda+5, \lambda+5$.

(2) $\lambda, \lambda-1, \lambda-2, \lambda-3, \lambda-4$.

(3) $(\lambda+1)^2,(\lambda+1)^2, \lambda-1$.

(4) $\lambda-2, \lambda-2, \lambda+1, \lambda+1, \lambda+1$.

3. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式是 $m_A(\lambda)$, 数 $a \neq 0$. 求方阵 $\boldsymbol{B}=a \boldsymbol{A}+b \boldsymbol{I}$ 的极小多项式 $m_B(\lambda)$.

4. 设 $\boldsymbol{\varphi}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 其中 $V=C(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\alpha})$ 为循环空间, $\boldsymbol{\alpha}$ 为循环向量. 设 $\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\xi}$ 是与 $\boldsymbol{\varphi}$ 乘法可交换的两个线性变换, 求证: $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\xi}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\alpha})$.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实方阵，试求 $C(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{B} \in M_3(\mathbb{R}) | \boldsymbol{A B}=\boldsymbol{B A}\}$.

6. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换, $f(\lambda), m(\lambda)$ 分别是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的特征多项式和极小多项式. 如果存在 V 的 $\boldsymbol{\varphi}$-不变子空间 V_1, V_2, 使得

$$V=V_1 \oplus V_2, \quad \operatorname{dim} V_1<\operatorname{dim} V, \quad \operatorname{dim} V_2<\operatorname{dim} V$$

则称 V 是 $\boldsymbol{\varphi}$-可分解的, 否则称 V 是 $\boldsymbol{\varphi}$-不可分解的. 证明: V 是 $\boldsymbol{\varphi}$-不可分解的充分必要条件是 $f(\lambda)=m(\lambda)=p(\lambda)^k$, 其中 $p(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的首一不可约多项式, $k \geq 1$.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵, 其特征多项式等于极小多项式, 证明: 矩阵方程 $\boldsymbol{X A}=\boldsymbol{A}' \boldsymbol{X}$ 的解是 $\mathbb{K}$ 上的对称阵.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵, 证明存在如下分解: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2$, 其中 $\boldsymbol{A}_0$ 为 $\mathbb{K}$ 上的纯量矩阵, $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$ 均为 $\mathbb{K}$ 上的幂零矩阵.

9. 设 $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{K})$ 在数域 $\mathbb{K}$ 上的初等因子组为 $P_1(\lambda)^{e_1}, P_2(\lambda)^{e_2}, \cdots, P_k(\lambda)^{e_k}$, 其中 $P_i(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上互异的首一不可约多项式, $e_i \geq 1(1 \leq i \leq k)$. 设 $\boldsymbol{C}\left(P_i(\lambda)^{e_i}\right)$ 为相伴于多项式 $P_i(\lambda)^{e_i}$ 的友阵, 证明: $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{K}$ 上相似于分块对角阵

$$\operatorname{diag}\left\{\boldsymbol{C}\left(P_1(\lambda)^{e_1}\right), \boldsymbol{C}\left(P_2(\lambda)^{e_2}\right), \cdots, \boldsymbol{C}\left(P_k(\lambda)^{e_k}\right)\right\}$$

试用上述结论证明第三届全国大学生数学竞赛预赛一道试题: 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 证明: $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\operatorname{diag}\{\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\}$, 其中 $\boldsymbol{B}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的可逆阵, $\boldsymbol{C}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的幂零阵, 即存在 $m \in \mathbb{Z}^{+}$, 使得 $\boldsymbol{C}^m=\boldsymbol{O}$.

10. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 $n(n \geq 2)$ 阶方阵, 满足: $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1, \boldsymbol{A B}=\boldsymbol{B A}=\boldsymbol{O}$. 证明: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为非异阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 0 的代数重数等于 1 且 $\boldsymbol{B}$ 的秩等于 1 .