1. 已知矩阵的下列不变因子组，写出 Jordan 标准型.

(1) $1,\cdots,1,\lambda,\lambda(\lambda-1)^2,\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-4)$;

(2) $1,\cdots,1,\lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda-7)^3$;

(3) $1,\cdots,1,\lambda^2+1,\lambda(\lambda^2+1),\lambda(\lambda^2+1)$.

2. 求过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为 Jordan 标准型.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\-4&-4&-3\end{pmatrix}$; (2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$; (3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\7&-2&-3\\3&-1&-1\end{pmatrix}$.

3. (1) 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\a&2&0\\b&c&-1\end{pmatrix}.$$

(i) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的一切可能的若尔当标准型；

(ii) 给出 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的一个充要条件.

(2) 求出

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&a&2\end{pmatrix}$$

的一切可能的若尔当标准型.

4. 设 V 为 n 阶复方阵全体构成的线性空间，V 上的线性变换 φ 定义为 $\varphi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XA}'$, 其中 $\boldsymbol{A}\in V$. 证明：φ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

5. 证明实对称阵的特征值都是实数. 进一步, 利用 Jordan 标准型理论和反证法证明实对称阵都可实对角化.

6. 设 n 阶复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足: 对任意的正整数 k, $\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}^k\right)=\operatorname{r}(\boldsymbol{A})$. 求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型.

7. 设 $n(n>2)$ 阶复方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 2，试求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型.

8. 设 $n(n>2)$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式为 $\lambda^3-\lambda^2$, 试求 $\boldsymbol{A}$ 可能的互不相似的 Jordan 标准型的总个数.

9. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 $n(n\geq 2)$ 阶方阵, 已知 $\boldsymbol{AB}$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}_n(0)$, 试求 $\boldsymbol{BA}$ 的 Jordan 标准型, 并举例说明存在性.

10. 设 V 为 n 阶复方阵全体构成的线性空间，V 上的线性变换 φ 定义为 $\varphi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{JXJ}$, 其中 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_n(0)$ 是特征值为 0 的 n 阶 Jordan 块. 试求 φ 的 Jordan 标准型.