1. 求非异阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为 Jordan 标准型, 并写出 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. (2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\&1&2&3\\&&1&2\\&&&1\end{pmatrix}$. (3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-3&3\\-2&-2&2\end{pmatrix}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 6 阶矩阵, 具有特征多项式

$$f(x)=(x+2)^2(x-1)^4.$$

(1)$\boldsymbol{A}$ 的极小多项式为 $p(x)=(x+2)(x-1)^3$. 求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型.

(2)$\boldsymbol{A}$ 的极小多项式为 $p(x)=(x+2)(x-1)^2$, 求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型.

3. 求 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式和 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}.$$

4. 设 E 是由次数不超过 4 的一切实系数一元多项式组成的向量空间, 对于 E 中任意 $P(x)$, 以 x^2-1 除所得商及余式分别为 $Q(x)$ 和 $R(x)$, 即

$$P(x)=Q(x)(x^2-1)+R(x).$$

设 φ 是 E 到 E 的映射, 使

$$\varphi(P(x))=R(x)$$

证明 φ 是一个线性变换，求 φ 关于基底 $\{1,x,x^2,x^3\}$ 的矩阵以及 φ 的 Jordan 标准型.

5. 证明对方阵 $\boldsymbol{A}$, 存在方阵 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{AT}$ 可对角化.

6. 证明: 存在 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$, 使得

$$\sin\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\cdots&\cdots&\frac{1}{2^n}\\&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\cdots&\frac{1}{2^{n-1}}\\&&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&\ddots&\frac{1}{4}\\&&&&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

7. 设 n 阶复方阵 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征值都是属于开区间 $(-1,1)$ 的实数，证明：矩阵方程 $\sin\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$ 必有解.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复方阵, θ_0 是 $\cos x=x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 中的唯一解. 证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 θ_0, 则 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\cos\boldsymbol{A}$.

9. 设 $\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_n\\-\boldsymbol{I}_n&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

(1) 证明: $\boldsymbol{J}$ 相似于 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{S},\boldsymbol{S},\cdots,\boldsymbol{S}\}$;

(2) 设 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{R})$, 满足 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{J}+\boldsymbol{JA}=\boldsymbol{O}$, 证明: $\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}'}\boldsymbol{J}\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{J}$;

(3) 试求 e^{tJ}.