1. 求非异阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为 Jordan 标准型, 并写出 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. (2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\&1&2&3\\&&1&2\\&&&1\end{pmatrix}$. (3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-3&3\\-2&-2&2\end{pmatrix}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 6 阶矩阵, 具有特征多项式

$$f(x)=(x+2)^2(x-1)^4.$$

(1)$\boldsymbol{A}$ 的极小多项式为 $p(x)=(x+2)(x-1)^3$. 求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型.

(2)$\boldsymbol{A}$ 的极小多项式为 $p(x)=(x+2)(x-1)^2$, 求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型.

解: (1) $J=\operatorname{diag}\{-2,-2,1,J_3(1)\}$;(2)$J=\operatorname{diag}\{-2,-2,J_2(1),J_2(1)\}$,

$J=\operatorname{diag}\{-2,-2,1,1,J_2(1),J_2(1)\}$

3. 求 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式和 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}.$$

解 x^2-2x

4. 设 E 是由次数不超过 4 的一切实系数一元多项式组成的向量空间, 对于 E 中任意 $P(x)$, 以 x^2-1 除所得商及余式分别为 $Q(x)$ 和 $R(x)$, 即

$$P(x)=Q(x)(x^2-1)+R(x).$$

设 φ 是 E 到 E 的映射, 使

$$\varphi(P(x))=R(x)$$

证明 φ 是一个线性变换，求 φ 关于基底 $\{1,x,x^2,x^3\}$ 的矩阵以及 φ 的 Jordan 标准型. 证明: 对任意 $f_1(x),f_2(x)\in E,k\in\mathbf{R}$, 设用 x^2-1 除所得商和余式分别为 $q_i(x),r_i(x)(i=1,2)$, 即

$$f_1(x)=q_1(x)\left(x^2-1\right)+r_1(x),$$
$$f_2(x)=q_2(x)\left(x^2-1\right)+r_2(x),$$

那么

$$f_1(x)+f_2(x)=[q_1(x)+q_2(x)]\left(x^2-1\right)+\left(r_1(x)+r_2(x)\right),$$

所以

$$\begin{aligned}\varphi\left[f_1(x)+f_2(x)\right]&=r_1(x)+r_2(x)\\&=\varphi\left[f_1(x)\right]+\varphi\left[f_2(x)\right].\end{aligned}$$

又 $\varphi\left[kf_1(x)\right]=kr_1(x)=k\varphi\left[f_1(x)\right]$, 所以 φ 是 E 的线性变换. 另外, 由 $\varphi(P(x))=R(x)$ 知

$$\varphi(1)=1,\quad\varphi(x)=x,\quad\varphi\left(x^2\right)=1,\quad\varphi\left(x^3\right)=x,\quad\varphi\left(x^4\right)=1,$$

所以 $\varphi(1,x,x^2,x^3,x^4)=(1,x,x^2,x^3,x^4)\,A$, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

5. 证明对方阵 $\boldsymbol{A}$, 存在方阵 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{AT}$ 可对角化.

证明：由若尔当变换可知，$A=S+N$, S 可对角化，N 为幂零阵 $(N^k=0)$，且 S 与 N 可以交换，就有

$$(S+N)(S^{k-1}-S^{k-2}N+\cdots+(-1)^{k-1}N^{k-1})=S^k+(-1)^kN^k=S^k;$$

令 $T=S^{k-1}-S^{k-2}N+\cdots+(-1)^{k-1}N^{k-1}$.

6. 证明: 存在 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$, 使得

$$\sin\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac12&\frac14&\cdots&\cdots&\frac1{2^n}\\&\frac12&\frac14&\cdots&\frac1{2^{n-1}}\\&&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&\ddots&\frac14\\&&&&\frac12\end{pmatrix}.$$

证明：记

$$B=\begin{pmatrix}\frac12&\frac14&\cdots&\cdots&\frac1{2^n}\\&\frac12&\frac14&\cdots&\frac1{2^{n-1}}\\&&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&\ddots&\frac14\\&&&&\frac12\end{pmatrix},$$

则 B 的特征值全为 $\frac12$, 特征值 $\frac12$ 的几何重数等于 $n-r\left(B-\frac12I_n\right)=n-(n-1)=1$, 于是 B 的 Jordan 标准型中只有一个 Jordan 块 $J_n\left(\frac12\right)$, 即 B 相似于 $J_n\left(\frac12\right)$. 另一方面, 将 Jordan 块 $J_n\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 代入 $\sin z$ 中作为测试矩阵 (注意 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac12,\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt3}{2}\neq0$) 有:

$$\sin J_n\left(\frac{\pi}{6}\right)=\begin{pmatrix}\frac12&\frac{\sqrt3}{2}&\cdots&\cdots&*\\&\frac12&\frac{\sqrt3}{2}&\cdots&*\\&&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&\ddots&\frac{\sqrt3}{2}\\&&&&\frac12\end{pmatrix},$$

同理可证明 $\sin J_n\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 相似于 $J_n\left(\frac12\right)$. 因此, $\sin J_n\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 相似于 B. 由于这两个矩阵都是实矩阵, 故它们在实数域上也相似, 即存在非异实矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$B=P^{-1}\sin J_n(\frac{\pi}{6})P=\sin(P^{-1}J_n(\frac{\pi}{6})P).$$

令 $A=P^{-1}J_n(\frac{\pi}{6})P$, 则 A 即为满足条件的实矩阵.

7. 设 n 阶复方阵 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征值都是属于开区间 $(-1,1)$ 的实数，证明：矩阵方程 $\sin\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$ 必有解.

证明：设 $\boldsymbol{P}$ 为非异阵, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=J=\operatorname{diag}\left\{\boldsymbol{J}_{r_1}\left(\lambda_1\right),\cdots,\boldsymbol{J}_{r_k}\left(\lambda_k\right)\right\}$ 为 Jordan 标准型, 我们先对 Jordan 块来证明结论. 任取 $\sin x=\lambda_i$ 的根 μ_i, 由 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征值都是属于开区间 $(-1,1)$ 的实数，可知

$$\sin\left(\boldsymbol{J}_{r_i}\left(\mu_i\right)\right)=\begin{pmatrix}\sin\left(\mu_i\right) & \sin'\left(\mu_i\right) & \cdots & * \\ & \sin\left(\mu_i\right) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \sin'\left(\mu_i\right) \\ & & & \sin\left(\mu_i\right)\end{pmatrix}$$

于是 $\sin\left(J_{r_i}\left(\mu_i\right)\right)$ 的特征值全为 λ_i, 由于 $\left|\sin\mu_i\right|<1$, $\sin'\left(\mu_i\right)=\cos\mu_i\neq 0$. 其几何重数等于 $r_i-\mathrm{r}\left(g\left(\boldsymbol{J}_{r_i}\left(\mu_i\right)\right)-\lambda_i I\right)=r_i-\left(r_i-1\right)=1$. 因此 $\sin\left(\boldsymbol{J}_{r_i}\left(\mu_i\right)\right)$ 的 Jordan 标准型中只有一个 Jordan 块, 即 $\sin\left(J_{r_i}\left(\mu_i\right)\right)$ 相似于 $\boldsymbol{J}_{r_i}\left(\lambda_i\right)$. 设 $\boldsymbol{Q}_i$ 为非异阵, 使得 $\boldsymbol{J}_{r_i}\left(\lambda_i\right)=\boldsymbol{Q}_i\sin\left(\boldsymbol{J}_{r_i}\left(\mu_i\right)\right)\boldsymbol{Q}_i^{-1}=\sin\left(\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{J}_{r_i}\left(\mu_i\right)\boldsymbol{Q}_i^{-1}\right)$, 故结论对 Jordan 块成立. 令 $Q=\operatorname{diag}\left\{Q_1,\cdots,Q_k\right\}$, $C=\operatorname{diag}\left\{J_{r_1}\left(\mu_1\right),\cdots,J_{r_k}\left(\mu_k\right)\right\}$, 则

$$J=\operatorname{diag}\left\{J_{r_1}\left(\lambda_1\right),\cdots,J_{r_k}\left(\lambda_k\right)\right\}=Q\sin(C)Q^{-1}=\sin\left(QCQ^{-1}\right),$$

故结论对 Jordan 标准型也成立. 最后我们有

$$\boldsymbol{A}=\mathbf{PJP}^{-1}=P\sin\left(QCQ^{-1}\right)P^{-1}=\sin\left(PQCQ^{-1}P^{-1}\right),$$

令 $X=PQCQ^{-1}P^{-1}$ 即可.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复方阵, θ_0 是 $\cos x=x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 中的唯一解. 证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 θ_0, 则 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\cos\boldsymbol{A}$.

证明：设 $\boldsymbol{P}$ 为非异阵, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}=\operatorname{diag}\left\{\boldsymbol{J}_{r_1}\left(\theta_0\right),\cdots,\boldsymbol{J}_{r_k}\left(\theta_0\right)\right\}$ 为 Jordan 标准型, 我们先对 Jordan 块来证明结论. 经计算可得

$$\cos J_{r_i}\left(\theta_0\right)=\begin{pmatrix}\cos\theta_0 & -\sin\theta_0 & \cdots & * \\ & \cos\theta_0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -\sin\theta_0 \\ & & & \cos\theta_0\end{pmatrix}$$

于是 $\cos J_{r_i}\left(\theta_0\right)$ 的特征值全为 $\cos\theta_0=\theta_0$, 上次对角元全为 $-\sin\theta_0<0$, 从而其几何重数等于 $r_i-r\left(\cos J_{r_i}\left(\theta_0\right)-\theta_0\boldsymbol{I}\right)=r_i-\left(r_i-1\right)=1$. 因此 $\cos\boldsymbol{J}_{r_i}\left(\theta_0\right)$ 的 Jordan 标准型中只有一个 Jordan 块, 即 $\cos\boldsymbol{J}_{r_i}\left(\theta_0\right)$ 相似于 $\boldsymbol{J}_{r_i}\left(\theta_0\right)$. 设 $\boldsymbol{Q}_i$ 为非异阵, 使得 $\boldsymbol{J}_{r_i}\left(\theta_0\right)=\boldsymbol{Q}_i\cos\boldsymbol{J}_{r_i}\left(\theta_0\right)\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{i}}^{-1}$, 于是结论对 Jordan 块成立. 令 $Q=\operatorname{diag}\left\{Q_1,\cdots,Q_k\right\}$, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}&=\operatorname{diag}\left\{\boldsymbol{J}_{r_1}\left(\theta_0\right),\cdots,\boldsymbol{J}_{r_k}\left(\theta_0\right)\right\}=\operatorname{diag}\left\{\boldsymbol{Q}_1\cos\boldsymbol{J}_{r_1}\left(\theta_0\right)\boldsymbol{Q}_1^{-1},\cdots,\boldsymbol{Q}_k\cos\boldsymbol{J}_{r_k}\left(\theta_0\right)\boldsymbol{Q}_k^{-1}\right\}\\&=\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}\left\{\cos\boldsymbol{J}_{r_1}\left(\theta_0\right),\cdots,\cos\boldsymbol{J}_{r_k}\left(\theta_0\right)\right\}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}\cos(\boldsymbol{J})\boldsymbol{Q}^{-1}\end{aligned}$$

于是结论对 Jordan 标准型也成立. 最后我们有

$$\begin{aligned}A&=PJP^{-1}=PQ\cos(J)Q^{-1}P^{-1}=PQ\cos\left(P^{-1}AP\right)Q^{-1}P^{-1}\\&=PQP^{-1}\cos(A)PQ^{-1}P^{-1}=PQP^{-1}\cos(\boldsymbol{A})\left(PQP^{-1}\right)^{-1}\end{aligned}$$

于是结论对一般矩阵也成立.

9. 设 $\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

(1) 证明: $\boldsymbol{J}$ 相似于 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{S},\boldsymbol{S},\cdots,\boldsymbol{S}\}$;

(2) 设 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{R})$, 满足 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 证明: $\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}'}\boldsymbol{J}\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{J}$;

(3) 试求 e^{tJ}.

(1) 设 $e_1,e_2,\cdots,e_{2n}$ 是 $2n$ 维的标准单位列向量, 置换矩阵 $\boldsymbol{P}=(e_1,e_{n+1},e_2,e_{n+2},\cdots,\boldsymbol{e}_n,e_{2n})$, 由 [问题 2019A03] 可知 $\boldsymbol{P}$ 是正交阵, 并且不难验证 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{J}P=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{S},\boldsymbol{S},\cdots,\boldsymbol{S}\}$. 也可以利用有理标准型来证明. 显然, $\boldsymbol{S}$ 是多项式 λ^2+1 的 Frobenius 块. 由白皮书例 2.72 可知 $\lambda\boldsymbol{I}_{2n}-\boldsymbol{J}=\begin{vmatrix} \lambda\boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{I}_n & \lambda\boldsymbol{I}_n \end{vmatrix}=|(\lambda^2+1)\boldsymbol{I}_n|=(\lambda^2+1)^n$. 注意到 $\boldsymbol{J}^2+\boldsymbol{I}_{2n}=\boldsymbol{O}$, 故 $\boldsymbol{J}$ 的极小多项式为 λ^2+1. 由于 λ^2+1 是实数域上的不可约多项式, 故 $\boldsymbol{J}$ 的不变因子组为 $1,\cdots,1,\lambda^2+1,\cdots,\lambda^2+1$, 再由有理标准型理论可知, $\boldsymbol{J}$ 相似于 $\boldsymbol{F}=\mathrm{diag}\left\{\boldsymbol{F}\left(\lambda^2+1\right),\cdots,\boldsymbol{F}\left(\lambda^2+1\right)\right\}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{S},\cdots,\boldsymbol{S}\}$.

(2) 由 $A'\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}=\boldsymbol{O}$ 可得 $\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{J}=-\boldsymbol{A}$. 注意到相似关系与幂级数相容以及 $\mathrm{e}^{-A}=\left(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\right)^{-1}$, 故 $\left(\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}\right)^{-1}=\mathrm{e}^{-t\boldsymbol{A}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{J}^{-1}(t\boldsymbol{A}')\boldsymbol{J}}=\boldsymbol{J}^{-1}\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}'}\boldsymbol{J}$, 于是 $\boldsymbol{J}=\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}'}\boldsymbol{J}\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}$.

(3) 由 (1) 可知 $\boldsymbol{J}^2=-\boldsymbol{I}_{2n}$, 故

$$\begin{aligned} e^{tJ} &= \boldsymbol{I}_{2n}+\frac{t\boldsymbol{J}}{1!}+\frac{(t\boldsymbol{J})^2}{2!}+\frac{(t\boldsymbol{J})^3}{3!}+\frac{(t\boldsymbol{J})^4}{4!}+\cdots \\ &= \left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\cdots\right)\boldsymbol{I}_{2n}+\left(\frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}+\cdots\right)\boldsymbol{J} \\ &= \cos t\boldsymbol{I}_{2n}+\sin t\boldsymbol{J} \end{aligned}$$