

# 数学物理方程

谷超豪 李大潜 陈恕行 郑宋穆 谭永基

复旦大学智复实验室程新宇

感谢中山大学（深圳）罗照南老师的整理、授权



- ① 第一章 波动方程
- ② 第二章 热传导方程
- ③ 第三章 调和方程
- ④ 第四章 二阶线性偏微分方程的分类与总结



- ① 第一章 波动方程
  - 方程的导出、定解条件
- ② 第二章 热传导方程
  - 达朗贝尔公式、波的传播
  - 初边值问题的分量变量法
- ③ 第三章 调和方程
  - 高维波动方程的柯西问题
- ④ 第四章 二阶线性偏微分方程的分类与总结
  - 波的传播与衰减
  - 能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性



## §1 方程的导出、定解条件

## 1. 弦振动方程的导出

二阶偏微分方程的三大典型方程：双曲型方程（波动方程），抛物型方程（热传导方程），椭圆型方程（调和、泊松方程）。

本章研究最典型的双曲型方程：波动方程。

首先看一维波动方程：弦振动方程。

弦振动方程的导出：给定一根两端固定的拉紧的均匀柔软的弦（比如吉他），长为  $l$ ，在外力作用下在平衡位置附近作微小的横振动，求弦上各点的运动规律。

理想化假设：

1. 弦均匀：（线）密度  $\rho$  是常数且  $m = \rho l$ ；
2. 弦在某一平面内作微小横振动；
3. 弦是柔软的，弦上各质点间的张力方向与弦的切线方向一致，且弦的伸长形变与张力的关系服从胡克（Hooke）定律。

先讨论不受外力作用的情形。根据物理学中的牛顿第二定律与冲量定律有

$$F = ma,$$

$$F\Delta t = m\Delta v,$$

其中  $a, v$  分别表示物体的加速度与速度。

如图 1.1 选择坐标系，将弦的两端固定在  $x$  轴的  $O, L$  两点 ( $OL = l$ )。  $u(x, t)$ ：弦在时刻  $t$  所处的位置。



## §1 方程的导出、定解条件

## 1. 弦振动方程的导出

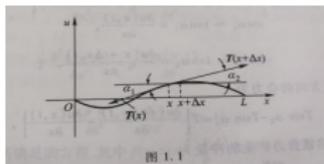


图 1.1

任取一弦段  $(x, x + \Delta x)$ , 弧长

$$\Delta s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \stackrel{\text{假设}^2}{\approx} \int_x^{x+\Delta x} dx = \Delta x, \quad (1.1)$$

这样这段弦在振动过程中在  $x$  处的张力  $\mathbf{T}(x, t)$ , 大小  $T(x, t) = k\Delta s = k \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \approx k\Delta x$ , 从而张力与时间无关 (大小与方向均与时间无关), 即  $\mathbf{T}(x, t) = \mathbf{T}(x)$ 。设

$\alpha_1$ : 张力  $\mathbf{T}(x)$  的方向与水平线的夹角;

$\alpha_2$ : 张力  $\mathbf{T}(x + \Delta x)$  的方向与水平线的夹角。

因弦只在  $x$  轴的垂直方向作横振动, 从而水平方向合力为零, 即

$$T(x + \Delta x) \cos \alpha_2 - T(x) \cos \alpha_1 = 0. \quad (1.2)$$



## §1 方程的导出、定解条件

## 1. 弦振动方程的导出

又因为是微小振动, 故

$$\tan \alpha_1 = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad \tan \alpha_2 = \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x},$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan \alpha_1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right]^2}} \approx 1, \quad (1.3)$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan \alpha_2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x}\right]^2}} \approx 1, \quad (1.4)$$

于是(1.2)变为

$$T(x + \Delta x, t) - T(x, t) = 0, \quad (1.5)$$

即  $T(x + \Delta x, t) = T(x, t) = T$ , 大小与  $x$  无关。综上可知, 张力  $\mathbf{T}$ : (1) 与时间无关 (大小与方向均与时间无关);

(2) 大小与  $x$  无关, 方向随  $x$  的改变而改变。

另外, 又由假设 2 知

$$\sin \alpha_1 \approx \tan \alpha_1 = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad (1.6)$$

$$\sin \alpha_2 \approx \tan \alpha_2 = \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x}, \quad (1.7)$$



## §1 方程的导出、定解条件

## 1. 弦振动方程的导出

于是, 张力在  $x$  轴的垂直方向的合力为  $T \sin \alpha_1 - T \sin \alpha_2 = T \left[ \frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right],$

从而冲量为

$$Ft = \int_t^{t+\Delta t} T \left[ \frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] dt, \quad (1.8)$$

而动量的改变量为

$$m\Delta v = \rho\Delta x(v_2 - v_1) = \int_x^{x+\Delta x} \rho \left[ \frac{\partial u(x, t+\Delta t)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right] dx. \quad (1.9)$$

于是  $\int_t^{t+\Delta t} T \left[ \frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] dt = \int_x^{x+\Delta x} \rho \left[ \frac{\partial u(x, t+\Delta t)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right] dx,$

从而

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} \left[ T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right] dx dt = 0. \quad (1.10)$$

再由  $\Delta x, \Delta t$  的任意性知

$$T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0.$$

记  $a^2 = \frac{T}{\rho}$ , 则有

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (1.11)$$



## §1 方程的导出、定解条件

## 1. 弦振动方程的导出

若受外力, 在方程(1.10)左端添加  $\int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} F(x, t) dx dt$  这一项, 得到

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} \left[ T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + F(x, t) \right] dx dt = 0, \quad (1.12)$$

从而

$$T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -F(x, t) \quad (1.13)$$

或记  $f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho}$

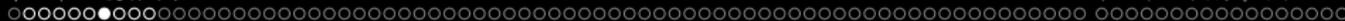
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t). \text{—受外力作用的弦振动方程} \quad (1.14)$$

二维波动方程(例薄膜振动)和三维波动方程(电磁波、声波的传播)的形式分别为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t). \quad (1.16)$$





## §1 方程的导出、定解条件

## 2. 定解条件

**偏微分方程：**包含未知函数和它的关于自变量的偏导数的方程。

**方程的解：**具有方程中所需的各阶连续偏导数，且代入满足方程。

**弦振动方程的边界条件：**

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, \quad (1.17)$$

**弦振动方程的初始条件：**

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq l). \quad (1.18)$$

初始条件与边界条件总称为**定解条件**。

把弦振动方程的(1.14)和定解条件(1.17)、(1.18)结合得到如下定解问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & (1.19) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 0 : u = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x), & (1.20) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 : u = 0, & (1.21) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = l : u = 0. & (1.22) \end{cases}$$



## §1 方程的导出、定解条件

## 2. 定解条件

第一类边界条件（狄利克雷（Dirichlet）边界条件）：

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0.$$

第二类边界条件（诺伊曼（Neumann）边界条件）：

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \mu(t).$$

第三类边界条件（罗宾（Robin）边界条件）：

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u \right) \Big|_{x=l} = 0 \quad \text{或} \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u \right) \Big|_{x=l} = \nu(t) \quad \left( \sigma = \frac{k}{T} \right).$$

方程的阶：偏微分方程所含的未知函数最高阶导数的阶数。

线性方程：方程对未知函数及其各阶导数总体来说是线性的。

非线性方程：方程对未知函数及其各阶导数总体来说不是线性的。

拟线性方程：方程对未知函数的所有高阶导数总体来说是线性的。

完全非线性方程：非线性方程中方程对未知函数的所有高阶导数不是线性的。



## §1 方程的导出、定解条件

## 2. 定解条件

例如

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad \text{一阶拟线性方程} \quad (1.23)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = u. \quad \text{一阶完全非线性方程} \quad (1.24)$$

齐次方程：不包含自由项（比如  $f(x, t)$ ）的方程，例如(1.11)。

非齐次方程：包含自由项（比如  $f(x, t)$ ）的方程，例如(1.14)。

齐次边界条件：边界项为零，比如边界条件(1.21)、(1.22)。

齐次边界条件：边界项为已知的函数，比如边界条件  $u|_{x=0} = \mu_1(t), u|_{x=l} = \mu_2(t)$ 。

齐次初始条件：初始值为零函数。

非齐次初始条件：初始值为已知的函数，比如初始条件(1.20)。





## §1 方程的导出、定解条件

## 3. 定解问题适定性概念

- 从物理角度：偏微分方程是从所看到的物理现象或过程推导出来的模型；
- 从数学角度：研究此模型各类定解问题的解以及解的性质，使对其所描述的自然现象或过程有更深入的认识。

**解的存在性：**定解问题是否有解？

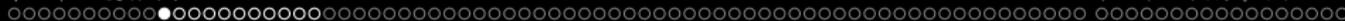
**解的唯一性：**这个定解问题的解是否只有一个？

**解的稳定性：**解对定解条件或自由项是否连续依赖？即当定解条件或自由项作很小的变化时，问题的解是否也作很小的变化？这对应测量的误差效应，因为在做实验中，误差不可避免。

**定解问题的适定性：**存在性、唯一性和稳定性。

除定解问题的适定性以外，还经常研究的问题有：解的正则性（光滑性），解的渐近性（包括衰减性），求解方法（包括精确解、渐进解与数值解的求解方法）等等。





## §2 达朗贝尔公式、波的传播

## 1. 叠加原理

**叠加原理：**几种不同原因所产生的效果等于这些不同原因单独产生的效果（假设其他原因不存在时，该原因所产生的效果）的累加。

叠加原理对线性方程和线性定解条件是成立的。

例如，对线性方程(1.14)，若  $u_1(x, t)$  是方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_1(x, t) \quad (2.1)$$

的解，而若  $u_2(x, t)$  是方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_2(x, t) \quad (2.2)$$

的解，则对任意的常数  $C_1, C_2$ ，函数

$$u(x, t) = C_1 u_1(x, t) + C_2 u_2(x, t) \quad (2.3)$$

是方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = C_1 f_1(x, t) + C_2 f_2(x, t) \quad (2.4)$$

的解。

**典型例子：**声学中把弦线振动所发出的复杂的声音分解成各种单音的叠加。



## §2 达朗贝尔公式、波的传播

## 2. 弦振动方程的达朗贝尔解法

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) & (t > 0, -\infty < x < +\infty), \\ t = 0 : u = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x) & (-\infty < x < +\infty). \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) & (t > 0, -\infty < x < +\infty), \\ t = 0 : u = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x) & (-\infty < x < +\infty). \end{cases} \quad (2.6)$$

上述定解问题只有初始条件，故通称为初值问题（或柯西（Cauchy）问题）。相应地，定解问题(1.19)-(1.22)中既有初始条件，又有边界条件，故称为初边值问题（或混合问题）。

自由振动：在(2.5)中  $f \equiv 0$ 。强迫振动：在(2.5)中  $f$  不恒等于零。

因方程与定解条件都是线性的，故成立叠加原理，即设  $u_1(x, t)$  和  $u_2(x, t)$  分别是下述初值问题

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \text{(自由振动)} \\ t = 0 : u = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x) & \text{(非齐次初始条件)} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \text{(自由振动)} \\ t = 0 : u = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x) & \text{(非齐次初始条件)} \end{cases} \quad (2.8)$$

和

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & \text{(强迫振动)} \\ t = 0 : u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0. & \text{(齐次初始条件)} \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & \text{(强迫振动)} \\ t = 0 : u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0. & \text{(齐次初始条件)} \end{cases} \quad (2.10)$$

的解。那么  $u = u_1(x, t) + u_2(x, t)$  是原初值问题(2.5)-(2.6)的解。



## §2 达朗贝尔公式、波的传播

## 2. 弦振动方程的达朗贝尔解法

先考察初值问题 (I), 通过自变量变换 (行波法) 求解.

引入新变量:

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at. (\implies x = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad t = \frac{\eta - \xi}{2a}) \quad (2.11)$$

利用复合函数求导可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= a \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right). \end{aligned}$$

从而 
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$$

因  $a^2 > 0$ , 于是(2.7)化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (2.12)$$

上式关于  $\eta, \xi$  分别积分一次可得其通解为

$$u \left( \frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\eta - \xi}{2a} \right) = \tilde{u}(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta), \quad (2.13)$$

再代回原来的自变量, 就可将(2.7)的通解表示为

$$u(x, t) = F(x - at) + G(x + at). \quad (2.14)$$



## §2 达朗贝尔公式、波的传播

## 2. 弦振动方程的达朗贝尔解法

把(2.12)代入初始条件(2.8), 得到

$$F(x) + G(x) = \varphi(x), \quad (2.15)$$

$$a(-F'(x) + G'(x)) = \psi(x). \quad (2.16)$$

再将(2.16)两边积分得

$$a(-F'(x) + G'(x)) + C = \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha. \quad (2.17)$$

于是又(2.15)和(2.17)可解得

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + \frac{C}{2a}, \\ G(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha - \frac{C}{2a}. \end{cases} \quad (2.18)$$

将其代入到(2.14), 就得到初值问题 (I) 的解

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha. \quad (\text{达朗贝尔公式}) \quad (2.19)$$

## 定理 2.1

设  $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $\psi(x) \in C^1(\mathbb{R})$ , 则初值问题(2.7)-(2.8)存在唯一解且由达朗贝尔公式(2.19)给出。

## §2 达朗贝尔公式、波的传播

## 3. 传播法

考察

$$\bar{u}(x, t) = F(x - at) \quad (a > 0), \quad (2.20)$$

显然它是齐次波动方程的解。

$t = 0$  :  $\bar{u}(x, 0) = F(x)$ , 初始的振动状态, 如图 1.4 实线所示;

$t = t_0$  :  $\bar{u}(x, t_0) = F(x - at_0)$ , 相当于原来的图形向右平移了  $at_0$ , 如图 1.4 虚线所示;

随着时间的推移, 这图形还要不断地向右移动。这说明当齐次波动方程的解具有(2.20)的形式时, 振动的波以常速度  $a$  向右传播。因此形如  $F(x - at)$  的解所描述的运动规律: **右传播波**; 形如  $G(x + at)$  的解所描述的运动规律: **左传播波**。

上述这种把定解问题 (I) 的解表示为右传播波和左传播波相叠加的方法, 称为**传播波法** (或**行波法**)。

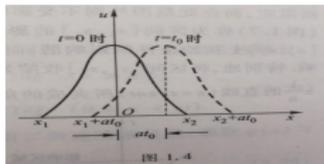


图 1.4

## §2 达朗贝尔公式、波的传播

## 4. 依赖区间、决定区域和影响区域

点  $(x, t)$  的依赖区间: 过点  $(x, t)$  分别作斜率为  $\pm \frac{1}{a}$  的直线与  $x$  轴所交截的区间  $[x - at, x + at]$ , 如图 1.5.

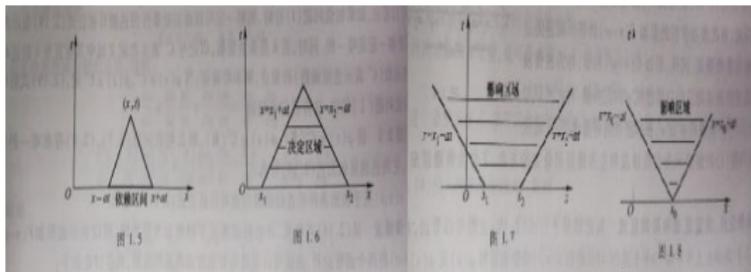
区间  $[x_1, x_2]$  的决定区域: 过点  $x_1$  作斜率为  $\frac{1}{a}$  的直线  $x = x_1 + at$  与过点  $x_2$  作斜率为  $-\frac{1}{a}$  的直线  $x = x_2 - at$  和区间  $[x_1, x_2]$  一起构成的一个三角形区域, 如图 1.6.

区间  $[x_1, x_2]$  的影响区域: 初始扰动影响到的范围由不等式

$$x_1 - at \leq x \leq x_2 + at \quad (t > 0) \quad (2.21)$$

所限定。(2.21) 所表示的区域称为区间  $[x_1, x_2]$  的影响区域, 如图 1.7. 特别地, 将区间  $[x_1, x_2]$  收缩为一点  $x_0$ , 就得到一点的影响区域为过此点的两条斜率为  $\pm \frac{1}{a}$  的直线  $x = x_0 \pm at$  所夹成的角状区域, 如图 1.8.

直线  $x = x_0 \pm at$  称为波动方程的特征线。扰动实际上沿特征线以有限速度传播。



## §2 达朗贝尔公式、波的传播

## 4. 依赖区间、决定区域和影响区域

例 讨论一端固定的半无界弦的自由振动问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (t > 0, 0 < x < \infty), \\ t = 0 : u = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x) & (0 \leq x < \infty), \\ x = 0 : u = 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

$$(2.23)$$

$$(2.24)$$

将问题化为：如何将在  $x \geq 0$  上已给的初始数据延拓为整个直线  $-\infty < x < \infty$  上的函数，使得用延拓后的函数作初值的柯西问题，其解在  $x = 0$  处恒为零。

记  $\Phi(x), \Psi(x)$  分别是  $\varphi, \psi$  延拓后的函数，则由达朗贝尔公式，以  $\Phi(x), \Psi(x)$  为初值的柯西问题的解为

$$U(x, t) = \frac{1}{2} [\Phi(x - at) + \Phi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi. \quad (2.25)$$

要使  $U(x, t)$  在  $x = 0$  处恒为零，就应当成立  $\frac{1}{2} [\Phi(-at) + \Phi(at)] + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \Psi(\xi) d\xi = 0$ 。

为此，只需将  $\varphi, \psi$  作奇延拓，即

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & (x \geq 0), \\ -\varphi(-x) & (x < 0), \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & (x \geq 0), \\ -\psi(-x) & (x < 0). \end{cases} \quad (2.27)$$



## §2 达朗贝尔公式、波的传播

## 4. 依赖区间、决定区域和影响区域

于是, 将上面定义的  $\Phi(x), \Psi(x)$  代入(2.25), 即得问题(2.22)-(2.24)的解为

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi & (x \geq at), \\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at) - \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) d\xi & (0 \leq x < at). \end{cases} \quad (2.28)$$

需要指出的是, 为使(2.28)所表示的函数  $u(x, t)$  具有二阶连续偏导数, 函数  $\varphi, \psi$  应当满足相容性条件

$$\varphi(0) = \varphi''(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0. \quad (2.29)$$



## §2 达朗贝尔公式、波的传播

## 5. 齐次化原理

现考察强迫振动情形的初值条件

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \\ t = 0 : u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

(2.31)

自由项  $f(x, t)$  表示时刻  $t$  时在  $x$  处单位质量所受的外力,  $\frac{\partial u}{\partial t}$  表示速度。

质点:  $m = \rho,$

$$[0, t] : \Delta t_j = t_{j+1} - t_j (j = 1, 2, \dots, l), \quad \text{外力为 } f(x, t_j) = \frac{F(x, t_j)}{m} = \frac{F(x, t_j)}{\rho},$$

$$\text{速度改变量: } u_j = f(x, t_j) \Delta t_j = \frac{F(x, t_j) \Delta t_j}{\rho}, \text{ 看作在时刻 } t = t_j \text{ 时的初始速度。}$$

就化成下面的齐次方程非齐次初始条件的初值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x^2} = 0 & (t > t_j), \\ t = t_j : \tilde{W} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} = f(x, t_j) \Delta t_j, \end{cases} \quad (2.32)$$

其解记为  $\tilde{W}(x, t; t_j, \Delta t_j)$ 。这样定解问题 (II) 的解  $u(x, t)$  应表示为

$$u(x, t) = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^l \tilde{W}(x, t; t_j, \Delta t_j). \quad (2.33)$$

因(2.32)为线性方程, 故  $\tilde{W}(x, t; t_j, \Delta t_j)$  与  $\Delta t_j$  成正比, 若记  $W(x, t; \tau)$  为齐次方程的定解问题



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 & (t > \tau), \\ t = \tau : W(x, t; t) = W(x, \tau; \tau) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t}(x, t; t) = \frac{\partial W}{\partial t}(x, \tau; \tau) = f(x, \tau) \end{cases} \quad (2.34)$$

的解, 则  $\tilde{W}(x, t; t_j, \Delta t_j) = \Delta t_j W(x, t; t_j)$ 。

于是定解问题 (II) 的解可表示为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^l \tilde{W}(x, t; t_j, \Delta t_j) = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^l \Delta t_j W(x, t; t_j) \\ &= \int_0^t W(x, t; \tau) d\tau. \end{aligned}$$

## 定理 2.2

齐次化原理 (杜阿梅尔 (Duhamel) 原理) 若  $W(x, t; \tau)$  是初值问题(2.34)的解 (其中  $\tau$  为参数), 则

$$u(x, t) = \int_0^t W(x, t; \tau) d\tau \quad (2.35)$$

就是初值问题 (II) 的解。

证

$$\frac{\partial u}{\partial t} = W(x, t; t) + \int_0^t \frac{\partial W}{\partial t}(x, t; \tau) d\tau = \int_0^t \frac{\partial W}{\partial t}(x, t; \tau) d\tau,$$

## §2 达朗贝尔公式、波的传播

## 5. 齐次化原理

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial W}{\partial t}(x, t; t) + \int_0^t \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}(x, t; \tau) d\tau = f(x, t) + a^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \int_0^t (x, t; \tau) d\tau = f(x, t) + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.$$

证毕。 □

在初值问题(2.34)中作变换  $t' = t - \tau$ , 可将(2.34)化为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t'^2} - a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 & (t' > 0), \\ W(x, t' + \tau; \tau)|_{t'=0} = 0, \quad \frac{\partial W(x, t' + \tau; \tau)}{\partial t'} \Big|_{t'=0} = \frac{\partial W}{\partial t}(x, \tau; \tau) = f(x, \tau), \end{cases} \quad (2.36)$$

由达朗贝尔公式(2.19)得其解为

$$W(x, t; \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a t'}^{x+a t'} f(\xi, \tau) d\xi = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi. \quad (2.37)$$

再代入(2.35)就得到初值问题 (II) 的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (2.38)$$



## §3 初边值问题的分量变量法

## 1. 分离变量法

用分离变量法考察波动方程的初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} t = 0 : u = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x), \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} x = 0 : u = 0, \quad x = l : u = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

利用叠加原理, 可将上述初边值问题分解成下面两个初边值问题:

$$(I) \begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0, \\ t = 0 : u_1 = \varphi(x), \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \psi(x), \\ x = 0 : u_1 = 0, \quad x = l : u_1 = 0; \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = f(x, t), \\ t = 0 : u_2 = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0, \\ x = 0 : u_2 = 0, \quad x = l : u_2 = 0. \end{cases}$$

显然有

$$u = u_1 + u_2.$$



## §3 初边值问题的分量变量法

## 1. 分离变量法

首先求解初边值问题

$$(I) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (3.4) \\ t = 0 : u = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x), & (3.5) \\ x = 0 \text{ 及 } x = l : u = 0. & (3.6) \end{cases}$$

考虑方程(3.4)可变量分离的非平凡（即不恒等于零）的特解：

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (3.7)$$

将(3.7)代入(3.4)，得到

$$X(x)T''(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0.$$

将上式分离变量，有

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (3.8)$$

而在(3.8)中，左边仅是  $t$  的函数，右边仅是  $x$  的函数，因此只能等于同一个常数，记为  $-\lambda$ （其值待定），就得到



## §3 初边值问题的分量变量法

## 1. 分离变量法

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (3.9)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (3.10)$$

再由边界条件(3.6)可知

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (3.11)$$

情形 A 当  $\lambda < 0$  时, 方程(3.10)的通解为

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

要使它满足边界条件(3.11), 就必须

$$C_1 + C_2 = 0,$$

$$C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & e^{-\sqrt{-\lambda}l} \end{vmatrix} \neq 0,$$



## §3 初边值问题的分量变量法

## 1. 分离变量法

情形 B 当  $\lambda = 0$  时, 方程(3.10)的通解为

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

要满足边界条件(3.11),  $X(x)$  也只能等于零。

情形 C 当  $\lambda > 0$  时, 方程(3.10)的通解为

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

由边界条件  $X(0) = 0$  知  $C_1 = 0$ , 此时  $X(x) = C_2 \sin \sqrt{\lambda} x$ , 再由  $X(l) = C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0$  可知, 为使  $C_2 \neq 0$ , 就必须  $\sin \sqrt{\lambda} l = 0$ . 于是

$$\lambda = \lambda_k = \frac{(k\pi)^2}{l^2} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad \text{—固有值 (特征值)} \quad (3.12)$$

于是就找到了一族分零解

$$X_k(x) = C_k \sin \frac{k\pi}{l} x \quad (k = 1, 2, \dots). \quad \text{—固有函数 (特征函数)} \quad (3.13)$$

将固有值  $\lambda_k$  代入方程(3.9), 可得其通解为

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + B_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3.14)$$



## §3 初边值问题的分量变量法

## 1. 分离变量法

这样就得到了方程(3.4)满足边界条件(3.6)的分离变量形式的特解:

$$U_k(x, t) = X_k(x)T_k(t) = \left( \tilde{A}_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + \tilde{B}_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x \quad (k = 1, 2, \dots).$$

变量分离解的线性组合得到初边值问题 (I) 的解

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \tilde{A}_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + \tilde{B}_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (3.15)$$

使它满足初始条件(3.5)来决定常数  $\tilde{A}_k, \tilde{B}_k$ 。

假设上述级数可逐项求导, 则有

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} \left( -\tilde{A}_k \sin \frac{k\pi a}{l} t + \tilde{B}_k \cos \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

故由初始条件(3.5)应有

$$\begin{cases} \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \sin \frac{k\pi}{l} x, \\ \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{B}_k k\pi a}{l} \sin \frac{k\pi}{l} x. \end{cases}$$

由  $\{\sin \frac{k\pi}{l} x\}_{k=1}^{\infty}$  在区间  $[0, l]$  的正交性, 得

$$\begin{cases} \tilde{A}_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi, \\ \tilde{B}_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi. \end{cases} \quad (3.16)$$

将  $\tilde{A}_k, \tilde{B}_k$  代入到(3.15)即得  $u(x, t)$  的表达式。



## §3 初边值问题的分量变量法

## 1. 分离变量法

## 引理 3.1

如果  $\varphi(x) \in C^3, \psi(x) \in C^2$ , 且  $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$ , 系数  $\tilde{A}_k, \tilde{B}_k$  由(3.16)确定, 那么级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\tilde{A}_k|, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\tilde{B}_k|$$

收敛。

**证** 引理的证明见附录 I。 □

由引理知, (3.15)右边关于  $x$  及  $t$  逐项求导两次以后的级数是绝对且一致收敛的, 因而这些求导后的级数收敛于  $u$  的相应导数, 所以  $u$  满足相应的方程、初始条件及边界条件。于是得

## 定理 3.1

若函数  $\varphi(x) \in C^3, \psi(x) \in C^2$ , 且

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0, \quad \text{—相容性条件} \quad (3.17)$$

则弦振动方程的定解问题 (I) 的解是存在的, 它可以用级数(3.15)给出, 其中  $\tilde{A}_k, \tilde{B}_k$  由(3.16)确定。

## §3 初边值问题的分量变量法

## 1. 分离变量法

若  $\varphi(x)$  及  $\psi(x)$  仅为连续函数但导数不连续时, 我们可以把  $\varphi(x)$  及  $\psi(x)$  分别看成函数列

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n \tilde{A}_k \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad \psi_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\tilde{B}_k k\pi a}{l} \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

的平方收敛极限, 即

$$\begin{aligned} \|\varphi_n(\xi) - \varphi(\xi)\|_{L^2}^2 &= \int_0^l (\varphi_n(\xi) - \varphi(\xi))^2 dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \\ \|\psi_n(\xi) - \psi(\xi)\|_{L^2}^2 &= \int_0^l (\psi_n(\xi) - \psi(\xi))^2 dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

则以  $\varphi_n(x)$  及  $\psi_n(x)$  为初始条件得方程(3.4)的解是

$$u_n(x, t) = \sum_{k=1}^n \left( \tilde{A}_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + \tilde{B}_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (3.18)$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,  $u_n(x, t) \xrightarrow{L^2} u(x, t)$ 。



## §3 初边值问题的分量变量法

## 2. 解的物理意义

由级数(3.15)可知, 初边值问题(I)的解是

$$u_k(x, t) = \left( \tilde{A}_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + \tilde{B}_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x$$

的叠加, 而上式又可写成

$$u_k(x, t) = N_k \cos(\omega_k t + \theta_k) \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (3.19)$$

其中

$$N_k = \sqrt{\tilde{A}_k^2 + \tilde{B}_k^2}, \quad \text{—波的振幅}$$

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{l} x, \quad \text{—波的圆频率(固有频率)}$$

$$\theta_k, \quad \text{—波的初位相}$$

$$\cos \theta_k = \frac{\tilde{A}_k}{\sqrt{\tilde{A}_k^2 + \tilde{B}_k^2}}, \quad \sin \theta_k = \frac{-\tilde{B}_k}{\sqrt{\tilde{A}_k^2 + \tilde{B}_k^2}}.$$

于是,  $u_k(x, t) = N_k \sin \frac{k\pi}{l} x \cdot \cos(\omega_k t + \theta_k)$  代表这样的振动波:

各点均以同一频率作简谐振动, 位相相同, 振幅  $\left| N_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right|$  依赖于点  $x$  的位置

位于  $x = \frac{ml}{k}$  ( $m = 0, 1, \dots, k$ ) 处的点在振动过程中保持不动, 称为**节点**

弦的这种形态的振动称为**驻波**, 所以分离变量法也称为**驻波法**

$$\omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (\text{弦的基音}), \quad \omega_k = \frac{k\pi a}{l} = k\omega_1 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (\text{弦的泛音}).$$



## §3 初边值问题的分量变量法

## 2. 解的物理意义

例 设弦两端固定在  $x$  轴的  $x=0$  及  $x=l$  上, 在点  $x=c(0 < c < l)$  处向上拉起  $h$ , 而后放开作自由振动, 求其运动规律。

解 以  $u(x, t)$  表示弦上各点的振动, 它满足(3.4)–(3.6), 其中初始条件改为

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} \frac{h}{c}x & (0 < x \leq c), \\ \frac{h}{l-c}(l-x) & (c < x \leq l), \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \equiv 0. \quad (3.21)$$

由于  $\psi(x) \equiv 0$ , 故所有的  $\tilde{B}_k = 0$ , 而

$$\begin{aligned} \tilde{A}_k &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi \\ &= \frac{2}{l} \int_0^c \frac{h}{c} \xi \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi + \frac{2}{l} \int_c^l \frac{h}{l-c} (l-\xi) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi \\ &= \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)k^2} \sin \frac{k\pi c}{l}, \end{aligned}$$

于是

$$u(x, t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)k^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi c}{l} \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \frac{k\pi a}{l} t. \quad (3.22)$$



## §3 初边值问题的分量变量法

## 3. 非齐次方程的情形

先讨论非齐次方程的初边值问题

$$(II) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & (3.23) \\ t = 0 : u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0, & (3.24) \\ x = 0 \text{ 及 } x = l : u = 0. & (3.25) \end{cases}$$

齐次化原理 若  $W = W(x, t; \tau)$  是初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t'^2} - a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 & (t > \tau), \\ t = \tau : W(x, t; \tau) = W(x, \tau; \tau) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t}(x, t; \tau) = \frac{\partial W}{\partial t}(x, \tau; \tau) = f(x, \tau), \\ x = 0 \text{ 及 } x = l : u = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

的解 (其中  $\tau \geq 0$  为参数), 则

$$u(x, t) = \int_0^t W(x, t; \tau) d\tau \quad (3.27)$$

就是初边值问题 (II) 的解。验证与第二节定理 2.2 完全类似。

令  $t' = t - \tau$ , (3.26) 就化为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t'^2} - a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 & (t' > 0), \\ W(x, t' + \tau; \tau)|_{t'=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial W(x, t' + \tau; \tau)}{\partial t'} \right|_{t'=0} = \frac{\partial W}{\partial t}(x, \tau; \tau) = f(x, \tau), \\ x = 0 \text{ 及 } x = l : W = 0. \end{cases} \quad (3.28)$$



## §3 初边值问题的分量变量法

## 3. 非齐次方程的情形

利用(3.15)、(3.16), 得到

$$W(x, t; \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\tau) \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \frac{k\pi a}{l} t' = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\tau) \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \frac{k\pi a}{l} (t - \tau), \quad (3.29)$$

$$B_k(\tau) = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l f(\xi, \tau) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi. \quad (3.30)$$

由齐次化原理, 把(3.29)代入(3.27), 就得到问题 (II) 的解为

$$u(x, t) = \int_0^t W(x, t; \tau) d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t B_k(\tau) \sin \frac{k\pi a}{l} (t - \tau) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (3.31)$$

注: 设  $f(x, t) \in C^2$  以及在端点满足条件

$$f(0, t) = f(l, t) = 0, \quad (3.32)$$

级数(3.31)确实是定解问题 (II) 的解。



## 4. 非齐次边界条件的情形

设函数  $\varphi(x), \psi(x), f(x, t)$  满足条件(3.17)和(3.31),  $\mu_1(t) \in C^2, \mu_2(t) \in C^2$  满足

$$\mu_1(0) = \mu_2(0) = \mu'_1(0) = \mu'_2(0) = \mu''_1(0) = \mu''_2(0) = 0.$$

考虑非齐次边界条件的初边值问题:

$$(II) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & (3.33) \\ t = 0 : u = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x), & (3.34) \\ x = 0 : u = \mu_1(t), \quad x = l : u = \mu_2(t). & (3.35) \end{cases}$$

先通过未知函数的适当变换把边界条件化为齐次的情形, 令

$$U(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)), \quad (3.36)$$

则函数  $U(x, t)$  满足边界条件(3.35)。再作变换

$$V(x, t) = u(x, t) - U(x, t), \quad (3.37)$$

则  $V(x, t)$  满足



## §3 初边值问题的分量变量法

## 4. 非齐次边界条件的情形

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = f(x, t) - \mu_1''(t) - \frac{x}{l} (\mu_2''(t) - \mu_1''(t)) \triangleq f_1(x, t), & (3.38) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V|_{t=0} = \varphi(x) - \mu_1(0) - \frac{x}{l} (\mu_2(0) - \mu_1(0)) \triangleq \varphi_1(x), & (3.39) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x) - \mu_1'(0) - \frac{x}{l} (\mu_2'(0) - \mu_1'(0)) \triangleq \psi_1(x), & (3.40) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \text{ 及 } x = l : V = 0. & (3.41) \end{cases}$$

于是有

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(l) = \varphi_1''(0) = \varphi_1''(l) = \psi_1(0) = \psi_1(l),$$

$$f_1(0, t) = f_1(l, t) = 0.$$

因此问题(3.38)-(3.41)的解  $V(x, t)$  存在, 有了  $V(x, t)$  之后, 问题(3.33)-(3.35)的解就为

$$u(x, t) = V(x, t) + U(x, t).$$



## §4 高维波动方程的柯西问题

## 1. 膜振动方程的导出

研究二维波动方程：膜振动方程。

膜：弹性固体薄片（笛子，鼓，锣）。

基本假设：

- ① 膜厚度很小，可视为一张曲面；膜均匀，即面密度  $\rho$  为常数。
- ② 膜的平衡位置在一平面内，膜上各点在垂直这一平面的方向上作微小振动，膜所受的外力均与该平面垂直。
- ③ 膜柔软，对弯曲变形不会产生任何抵抗力。

$u(x, y, t)$ ：膜在  $(x, y)$  处在时刻  $t$  的位移。

张力  $\mathbf{T}$  是常值：

- 大小、方向与时间变量  $t$  无关；
- 大小与与空间变量  $(x, y)$  无关，方向随  $(x, y)$  变化而变化。

若过薄膜上指定点  $P$  沿某一方向作一截口  $l$ ，则该薄膜位于  $l$  两侧的部分分别对对方有单位强度为  $T$  的拉力，拉力的方向与曲面方向垂直，又与  $l$  方向垂直。



## §4 高维波动方程的柯西问题

## 1. 膜振动方程的导出

任取膜上一小块  $\Delta$ , 它在  $Oxy$  平面的投影为  $\Omega$ , 如图 1.10 (为方便观察, 图中将  $\Delta$  的位置抬高了)。设  $\lambda$  为  $\Delta$  的边界, 它在平面的投影为  $\Gamma$ 。

$\boldsymbol{\tau}$ :  $\lambda$  的切线方向;       $\boldsymbol{v}$ :  $\Delta$  的法线方向;

$\boldsymbol{s}$ :  $\Gamma$  的切线方向;       $\boldsymbol{n}$ :  $\Gamma$  的法线方向。

则张力  $\boldsymbol{T}$  的方向与  $\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{v}$  的方向一致。

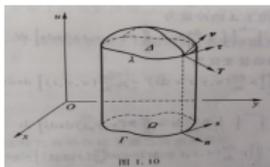


图 1.10

设曲面为  $G(x, y, z) = z - u(x, y, z)$ , 那么曲面法线  $\boldsymbol{v} = \left( \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right) = (-u_x, -u_y, 1)$ 。

设曲线  $\lambda$  为

$$\lambda: \begin{cases} x = x(l), \\ y = y(l), \\ z = z(l). \end{cases}$$



## §4 高维波动方程的柯西问题

## 1. 膜振动方程的导出

那么  $\boldsymbol{\tau}$  的方向可取为  $(x'(l), y'(l), z'(l))$ 。从而  $\boldsymbol{s}$  的方向可为  $(x'(l), y'(l), 0)$ ，将其单位化，令

$\cos(x, \boldsymbol{s}) = \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}$ ,  $\cos(y, \boldsymbol{s}) = \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}$ , 则  $\boldsymbol{s}$  的方向为  $(\cos(x, \boldsymbol{s}), \cos(y, \boldsymbol{s}), 0)$ 。另外， $z = u(x, y, t)$ , 所以

$$z = z(l) = u(x(l), y(l), t), \quad z'(l) = \frac{\partial u}{\partial x} x'(l) + \frac{\partial u}{\partial y} y'(l).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{s}} &= \nabla u \cdot \boldsymbol{s} = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot \boldsymbol{s} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos(x, \boldsymbol{s}) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(y, \boldsymbol{s}) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} x'(l) + \frac{\partial u}{\partial y} y'(l)}{\sqrt{(x'(l))^2 + (y'(l))^2}} \\ &= \frac{z'(l)}{\sqrt{(x'(l))^2 + (y'(l))^2}} \end{aligned}$$

所以  $\boldsymbol{\tau}$  的方向为

$$\left( \cos(x, \boldsymbol{s}), \cos(y, \boldsymbol{s}), \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{s}} \right).$$

于是  $\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{T})$  的方向可取为  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , 其中

$$\alpha_1 = \cos(y, \boldsymbol{s}) + \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{s}} u_y, \quad \alpha_2 = -\cos(x, \boldsymbol{s}) - \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{s}} u_x,$$

$$\alpha_3 = u_x \cos(y, \boldsymbol{s}) - u_y \cos(x, \boldsymbol{s}) = u_x \cos(y, \boldsymbol{n}) + u_y \cos(x, \boldsymbol{n}) = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}.$$



## §4 高维波动方程的柯西问题

## 1. 膜振动方程的导出

由此可知, 张力  $\mathbf{T}$  在  $z$  轴方向的分量为  $\mathbf{T}_u = T \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}$ . 由于  $u_x, u_y$  以及  $\frac{\partial u}{\partial s}$  都是小量, 故忽略高阶小量, 有  $\mathbf{T}_u \approx T \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ . 沿着曲线  $\lambda$ , 张力的合力为

$$\int_{\lambda} T \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\tau = \int_{\Gamma} T \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds \quad \left( d\tau = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)^2} ds \sim ds \right).$$

在面积  $\Delta$  上膜所受外力的合力为

$$\iint_{\Delta} F(x, y, t) d\sigma = \iint_{\Omega} F(x, y, t) dx dy \quad \left( d\sigma = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy \sim dx dy \right).$$

冲量为

$$Ft = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{\Gamma} T \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \iint_{\Omega} F(x, y, t) dx dy \right] dt. \quad (4.1)$$

动量变化为

$$mv_2 - mv_1 = \iint_{\Omega} \left[ \rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t + \Delta t) - \rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) \right] dx dy. \quad (4.2)$$

因此有

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{\Gamma} T \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \iint_{\Omega} F(x, y, t) dx dy \right] dt \\ &= \iint_{\Omega} \left[ \rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t + \Delta t) - \rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) \right] dx dy. \end{aligned}$$



## §4 高维波动方程的柯西问题

## 1. 膜振动方程的导出

假设  $u$  关于  $x, y$  的二阶偏导数都连续, 利用格林公式可得

$$\int_t^{t+\Delta t} \iint_{\Omega} \left\{ T \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F(x, y, t) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} dx dy dt = 0.$$

再利用时间和空间区域得任意性, 得到膜振动方程

$$T \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F(x, y, t) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

记  $\frac{T}{\rho} = a^2$ ,  $f = \frac{F}{\rho}$ , 就得到膜振动方程的标准形式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f, \quad (\text{强迫振动}) \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (\text{自由振动}) \quad (4.4)$$

方程(4.3)和(4.3)也称为二维波动方程。



## §4 高维波动方程的柯西问题

## 2. 定解条件的提法

初边值问题初始条件的提法:

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = \varphi(x, y), & \text{(初始位移)} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y), & \text{(初始速度)} \end{cases} \quad (4.5)$$

其中  $\varphi(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$  是已知函数。

第一类边界条件 (狄利克雷 (Dirichlet) 边界条件):

$$u(x, y, t)|_r = 0$$

$$\text{或} \quad u(x, y, t)|_r = \mu(x, y, t). \quad (4.6)$$

第二类边界条件 (诺伊曼 (Neumann) 边界条件):

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_r = 0, \quad (4.7)$$

$$\text{或} \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_r = \mu(x, y, t). \quad (4.8)$$

第三类边界条件 (罗宾 (Robin) 边界条件):

$$\left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u \right) \Big|_r = 0, \quad (4.9)$$

$$\text{或} \quad \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u \right) \Big|_{x=l} = \mu(x, y, t) \quad \left( \sigma = \frac{k}{T} \right). \quad (4.10)$$



## §4 高维波动方程的柯西问题

## 2. 定解条件的提法

柯西问题初始条件的提法:

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y). \end{cases} \quad -\infty < x, y < +\infty. \quad (4.11)$$

考察电磁波或声波在空间传播时, 得到的三维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f, \quad (\text{非齐次方程}) \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (\text{齐次方程}) \quad (4.13)$$

它们的边界条件和初始条件的提法与二维波动方程的一样。



## §4 高维波动方程的柯西问题

## 3. 球平均法

先考察三维齐次波动方程的柯西问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x, y, z). \end{cases} \quad (4.14)$$

首先考虑一个特殊情形: 初始资料  $\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z)$  具有球对称性. 令  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 此时,  $\varphi = \varphi(r), \psi = \psi(r)$ , 我们可寻求只依赖于  $t, r$  的解  $u = u(r, t)$ . 这样, (4.13)可写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (4.15)$$

令  $v = ru$ , 则  $v$  满足半无界的自由振动问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = 0, \\ v(r, 0) = ru(r, 0) = r\varphi(r), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(r, 0) = r\psi(r). \end{cases}$$

可用达朗贝尔公式求得  $v$ , 进而得到问题(4.14)的具有球对称形式的解。

对一般初始资料, 可用球平均法来求解. 球平均法的想法: 引入一个关于  $u(x, y, z)$  在具有不同球心、不同半径的球面上的平均值函数  $M_u$ . 建立  $M_u$  所满足的偏微分方程与柯西问题, 而后者恰好时比较容易求解的, 然后通过  $M_u$  得到  $u$  的表达式。



## §4 高维波动方程的柯西问题

## 3. 球平均法

设  $h(x, y, z) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ 。考虑函数  $h$  在以  $(x_1, x_2, x_3)$  为心、以  $r$  为半径的球面  $S_r$  上的平均值

$$M_h(x_1, x_2, x_3, r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} h(x, y, z) d_r \sigma, \quad (4.16)$$

其中  $d_r \sigma$  是单位球面  $S_r$  上的面积微元。

## 引理 4.1

设  $h \in C^2$ ，则其球平均函数  $M_h(x_1, x_2, x_3, r)$  也是二次连续可导的，且满足方程

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_h(x_1, x_2, x_3, r) = \Delta M_h(x_1, x_2, x_3, r) \quad \left( \text{其中 } \Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) \quad (4.17)$$

与初始条件

$$M_h \Big|_{r=0} = h(x_1, x_2, x_3), \quad \frac{\partial M_h}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0. \quad (4.18)$$

**证：** 球面  $S_r : (x-x_1)^2 + (y-x_2)^2 + (z-x_3)^2 = r^2$ 。令  $x = x_1 + r\alpha_1, y = x_2 + r\alpha_2, z = x_3 + r\alpha_3$ 。

则  $d_r \sigma = r^2 d\omega$ ，其中  $d\omega$  是单位球面  $S_1$  上的面积微元。(4.16)可写成



## §4 高维波动方程的柯西问题

## 3. 球平均法

$$\begin{aligned}
 M_h(x_1, x_2, x_3, r) &= \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} h(x, y, z) d_r \sigma \\
 &= \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_1} h(x_1 + r\alpha_1, x_2 + r\alpha_2, x_3 + r\alpha_3) \cdot r^2 d\omega \\
 &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} h(x_1 + r\alpha_1, x_2 + r\alpha_2, x_3 + r\alpha_3) d\omega,
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

将 (4.19) 对  $x_i (i = 1, 2, 3)$  求二阶导数, 然后相加可得

$$\Delta M_h = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \Delta h(x_1 + r\alpha_1, x_2 + r\alpha_2, x_3 + r\alpha_3) d\omega, \tag{4.20}$$

又

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M_h}{\partial r} &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h}{\partial x_i} \alpha_i d\omega = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h}{\partial x_i} \alpha_i d_r \sigma \\
 &= \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} \nabla h \cdot \mathbf{n} d_r \sigma = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} \frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} \alpha_i d_r \sigma.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

利用格林公式, 可得

$$\frac{\partial M_h}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r^2} \iiint_{D_r} \Delta h dV, \tag{4.22}$$

其中  $D_r$  是以  $(x_1, x_2, x_3)$  为心、以  $r$  为半径的球体。



## §4 高维波动方程的柯西问题

## 3. 球平均法

因

$$\frac{1}{4\pi r^2} \iiint_{D_r} \Delta h dV = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^r \iint_{S_r} \Delta h d\tau \sigma d\tau.$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial r} \iiint_{D_r} \Delta h dV = \frac{\partial}{\partial r} \left( \int_0^r \iint_{S_r} \Delta h d\tau \sigma d\tau \right) = \iint_{S_r} \Delta h d\tau \sigma.$$

从而再对  $r$  求一次导, 可得

$$\frac{\partial^2 M_h}{\partial r^2} = -\frac{1}{2\pi r^3} \iiint_{D_r} \Delta h dV + \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} \Delta h d\tau \sigma. \quad (4.23)$$

结合(4.20)、(4.22)及(4.23)知,  $M_h$  确实满足方程(4.17)。

因  $h \in C^2$ , 于是在(4.19)式中令  $r \rightarrow 0$ , 可得  $M_h(x_1, x_2, x_3, r) \rightarrow h(x_1, x_2, x_3)$ 。注意到  $\Delta h \in C$ , 利用中值定理知, 存在  $(\xi, \eta, \zeta)$  使得  $\iiint_{D_r} \Delta h dV = \Delta h(\xi, \eta, \zeta) \cdot |D_r|$ , 于是

$$\frac{\partial M_h}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r^2} \iiint_{D_r} \Delta h dV = \frac{\Delta h(\xi, \eta, \zeta)}{4\pi r^2} |D_r| = \frac{\Delta h(\xi, \eta, \zeta)}{3} r \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0).$$

引理得证。



## §4 高维波动方程的柯西问题

## 3. 球平均法

现设  $u(x_1, x_2, x_3, t)$  是柯西问题(4.14)的解, 对它关于  $x_1, x_2, x_3$  作球平均函数

$$M_u(x_1, x_2, x_3, r, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} u(x_1 + r\alpha_1, x_2 + r\alpha_2, x_3 + r\alpha_3, t) d\omega, \quad (4.24)$$

我们有

## 引理 4.2

设  $u(x_1, x_2, x_3, t)$  是柯西问题(4.14)的解, 则由(4.24)定义的  $M_u$  作为  $r, t$  的函数, 满足方程

$$\frac{\partial^2 M_u}{\partial t^2} - a^2 \left( \frac{\partial^2 M_u}{\partial t^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) M_u = 0 \quad (4.25)$$

与初始条件

$$M_u \Big|_{t=0} = M_\varphi(x_1, x_2, x_3, r), \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial M_u}{\partial t} \Big|_{t=0} = M_\psi(x_1, x_2, x_3, r). \quad (4.27)$$

**证** 对(4.24)求导并利用(4.14)可得

$$a^2 \Delta M_u = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} a^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x + r\alpha, t) d\omega = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x + r\alpha, t) d\omega = \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u.$$

再利用(4.17), 即得(4.25)。再由函数  $u(x_1, x_2, x_3, t)$  满足的初始条件立即推得(4.26)、(4.27)。引理得证。□



## §4 高维波动方程的柯西问题

## 3. 球平均法

将  $M_u(x_1, x_2, x_3, r, t)$  (相应地  $M_\varphi$  及  $M_\psi$ ) 往  $r < 0$  方向作偶延拓, 则它在  $-\infty < r < +\infty, t \geq 0$  上仍满足(4.25)-(4.27)。令  $v(x_1, x_2, x_3, r, t) \triangleq rM_u(x_1, x_2, x_3, r, t)$ , 则  $v$  满足

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = 0, \quad (4.28)$$

$$\begin{cases} v|_{t=0} = rM_\varphi(x_1, x_2, x_3, r), \\ v_t|_{t=0} = rM_\psi(x_1, x_2, x_3, r). \end{cases} \quad (4.29)$$

而  $v$  可达朗贝尔公式解出, 于是  $M_u = \frac{1}{r}v$ , 再令  $r \rightarrow 0$  就得到  $u(x_1, x_2, x_3, t)$ 。

## 定理 4.1

设  $\varphi \in C^3, \psi \in C^2$ , 那么三维波动方程柯西问题(4.14)-(4.15)存在唯一解

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}^M} \varphi dS \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}^M} \psi dS \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [tM_\varphi(x, y, z, at)] + tM_\psi(x, y, z, at), \quad (\text{泊松公式}) \end{aligned} \quad (4.30)$$

其中  $S_{at}^M$  表示以点  $M(x, y, z)$  为球心、 $at$  为半径得球面,  $dS$  为面积微元。

## §4 高维波动方程的柯西问题

## 3. 球平均法

证 由达朗贝尔公式求得  $v$  为

$$v = \frac{1}{2} \left[ (r+at)M_\varphi(x_1, x_2, x_3, r+at) + (r-at)M_\varphi(x_1, x_2, x_3, r-at) \right] \\ + \frac{1}{2a} \int_{r-at}^{r+at} \xi M_\psi(x_1, x_2, x_3, \xi) d\xi, \quad r \geq at, \quad (4.31)$$

$$v = \frac{1}{2} \left[ (at+r)M_\varphi(x_1, x_2, x_3, at+r) - (at-r)M_\varphi(x_1, x_2, x_3, at-r) \right] \\ + \frac{1}{2a} \int_{at-r}^{at+r} \xi M_\psi(x_1, x_2, x_3, \xi) d\xi, \quad 0 < r < at. \quad (4.31')$$

因之后要让  $r \rightarrow 0$ , 于是取  $v$  的表达式为 (4.31')。从而可得  $M_u$  的表达式为

$$M_u = \frac{1}{2r} \left[ (at+r)M_\varphi(x_1, x_2, x_3, at+r) - (at-r)M_\varphi(x_1, x_2, x_3, at-r) \right] \\ + \frac{1}{2ar} \int_{at-r}^{at+r} \xi M_\psi(x_1, x_2, x_3, \xi) d\xi. \quad (4.32)$$

令  $F(\xi) = \xi M_\varphi(x_1, x_2, x_3, \xi)$ ,  $G(\xi) = \xi M_\psi(x_1, x_2, x_3, \xi)$ , 于是有

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{F(at+r) - F(at-r)}{2r} = \frac{\partial F}{\partial \xi}(\xi) \Big|_{\xi=at} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} [F(at)] = \frac{\partial}{\partial t} [tM_\varphi(x_1, x_2, x_3, at)], \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2ar} \int_{at-r}^{at+r} G(\xi) d\xi = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{2ar} \cdot 2rG(\eta) \right] = \frac{1}{a} G(at) = tM_\psi(x_1, x_2, x_3, at).$$



## §4 高维波动方程的柯西问题

## 3. 球平均法

在(4.32)中, 令  $r \rightarrow 0$  可得

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ tM_\varphi(x_1, x_2, x_3, at) \right] + tM_\psi(x_1, x_2, x_3, at) \\ &\triangleq \frac{\partial}{\partial t} [u_1(x_1, x_2, x_3, t)] + u_2(x_1, x_2, x_3, t). \end{aligned} \quad (4.33)$$

从而(4.30)成立, 这同时也证明了解的唯一性。

下说明解的存在性, 验证(4.30)满足方程(4.14)。事实上, 由引理 4.1 知,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_2 &= \left[ a \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rM_\psi(x_1, x_2, x_3, r)) \right] \Big|_{r=at} \\ &= \left[ ar \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_\psi(x_1, x_2, x_3, r) \right] \Big|_{r=at} \\ &= [ar\Delta M_\psi(x_1, x_2, x_3, r)] \Big|_{r=at} \\ &= a^2 \Delta u_2, \end{aligned} \quad (4.34)$$

故  $u_2$  满足方程(4.14)。显然,  $t=0$  时  $u_2=0$ 。再由引理 4.1 知有

$$\frac{\partial}{\partial t} u_2 \Big|_{t=0} = \left( M_\psi + \frac{\partial}{\partial t} M_\psi \right) \Big|_{t=0} = \psi(x_1, x_2, x_3). \quad (4.35)$$



## §4 高维波动方程的柯西问题

## 3. 球平均法

类似可证,  $u_1$  也满足方程(4.14)。又该方程的系数为常数, 故  $\frac{\partial u_1}{\partial t}$  也满足方程(4.14)。又类似于(4.14)可知

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2, x_3),$$

于是

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) \right] \Big|_{t=0} = [\Delta u_1] \Big|_{t=0} = \Delta [u_1|_{t=0}] = 0.$$

因此,  $\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_2$  满足(4.14)中的两个初始条件, 从而可知,  $\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_2$  确实是柯西问题(4.14)的解。定理证毕。 □



## §4 高维波动方程的柯西问题

## 4. 降维法

现研究二维波动方程的柯西问题

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad (4.36)$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x, y), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x, y). \end{cases} \quad (4.37)$$

注意, 此问题不能直接用球平均法来求解, 但可用三维波动方程柯西问题的求解结果来解决这个问题。事实上, 将所考察的二维波动方程柯西问题的解  $u(x, y, t)$  看成高一维空间中的函数  $\tilde{u}(x, y, z, t) = u(x, y, t)$ , 因为  $\tilde{u}$  与  $z$  无关, 因此满足

$$\tilde{u}_{tt} = a^2(\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{yy} + \tilde{u}_{zz}), \quad (4.38)$$

$$\tilde{u}|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad \tilde{u}_t|_{t=0} = \psi(x, y). \quad (4.39)$$

反之也成立。所以, 若能解出(4.38)、(4.39), 并能证明解  $\tilde{u}(x, y, z, t)$  与  $z$  无关, 那么就能得到二维波动方程柯西问题(4.36)、(4.37)的解。这种方法称为降维法。

利用(4.30), 得到

$$\tilde{u} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}^M} \varphi dS \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}^M} \psi dS,$$

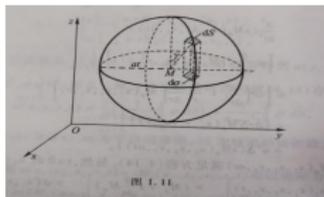
球面  $S_{at}^M$  和  $\varphi, \psi$  均与  $z$  无关, 而面积微元  $dS$  与  $z$  有关, 故将球面投影为圆盘  $\Sigma_{at}^M: (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \leq a^2 t^2$ 。



## §4 高维波动方程的柯西问题

## 4. 降维法

又注意到面积微元之间的关系： $d\sigma = dS \cdot \cos \gamma$ ，其中  $\gamma$  是两个面积微元法线方向间的夹角，如图



而  $\cos \gamma = \frac{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}{at}$ 。再将上下半球面的积分都化为同一个圆盘上的积分，这样有

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}(x, y, z, t) &= \tilde{u}(M, t) \\
 &= \frac{1}{2\pi a} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma_{at}^M} \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} \right. \\
 &\quad \left. + \iint_{\Sigma_{at}^M} \frac{\psi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi a} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta)}{\sqrt{(at)^2 - r^2}} r d\theta dr \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \frac{\psi(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta)}{\sqrt{(at)^2 - r^2}} r d\theta dr \right], \quad (\text{二维波动方程柯西问题的泊松公式}) \quad (4.40)
 \end{aligned}$$



## §4 高维波动方程的柯西问题

## 5. 非齐次波动方程柯西问题的解

非齐次波动方程的柯西问题

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t), \quad (4.41)$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi_0, \\ u_t|_{t=0} = \psi_0. \end{cases} \quad (4.42)$$

由叠加原理, 可将问题化为第一个问题: 齐次方程(4.14)满足非齐次初始条件(4.15)的解(泊松公式(4.30)已给出) + 第二个问题: 非齐次方程(4.41)满足齐次初始条件

$$\begin{cases} u|_{t=0} = 0, \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (4.43)$$

的解。

齐次化原理, 下求如下齐次方程的柯西问题

$$w_{tt} = a^2(w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}), \quad (4.44)$$

$$\begin{cases} w|_{t=\tau} = 0, \\ w_t|_{t=\tau} = f(x, y, z, \tau) \end{cases} \quad (4.45)$$

的解  $w(x, y, z, t; \tau)$ , 然后关于参数  $\tau$  积分, 得到



## §4 高维波动方程的柯西问题

## 5. 非齐次波动方程柯西问题的解

$$u(x, y, z, t) = \int_0^t w(x, y, z, t; \tau) d\tau, \quad (4.46)$$

就是柯西问题(4.41)、(4.43)的解。

下证由(4.46)给出的  $u$  确实是解。首先验证满足初始条件(4.43)。 $u|_{t=0} = 0$  显然满足。由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= w(x, y, z, t; t) + \int_0^t \frac{\partial w(x, y, z, t; \tau)}{\partial t} d\tau \\ &= 0 + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t} d\tau, \end{aligned}$$

所以  $u_t|_{t=0} = 0$ 。

再证  $u$  满足方程(4.41)。因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial w(x, y, z, t; \tau)}{\partial t} \Big|_{\tau=t} + \int_0^t \frac{\partial^2 w(x, y, z, t; \tau)}{\partial t^2} d\tau \\ &= f(x, y, z, t) + a^2 \Delta \int_0^t w d\tau = a^2 \Delta u + f. \end{aligned}$$

所以  $u$  满足方程(4.41)。验证结束。



## §4 高维波动方程的柯西问题

## 5. 非齐次波动方程柯西问题的解

现把这个解明显地表示出来。根据泊松公式, 有

$$w(x, y, z, t; \tau) = \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_{a(t-\tau)}^M} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{a(t-\tau)} dS,$$

因此, 作变量替换  $\tau = t - \frac{r}{a}$ , 有

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi a} \int_0^t \iint_{S_{a(t-\tau)}^M} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{a(t-\tau)} dS d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} \iint_{S_{a(t-\tau)}^M} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a})}{r} dS dr \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{r \leq at} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a})}{r} dV, \end{aligned} \quad (4.47)$$

其中  $dV$  表示体积微元, 积分在以  $(x, y, z)$  为球心、以  $at$  为半径的球体中进行。因此, 在时刻  $t$ , 位于  $M(x, y, z)$  处解  $u$  的数值由函数  $f$  在时刻  $\tau = t - \frac{r}{a}$  处的值在此球中的体积积分表出, 称这样的积分为推迟势。

二维情况可类似讨论。



## §5 波的传播与衰减

## 1. 依赖区域、决定区域和影响区域

二维情形:

$$\text{依赖区域: 平面 } t = 0 \text{ 上的圆: } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq a^2 t_0^2, \quad (5.1)$$

$$\text{决定区域: 圆锥体: } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq a^2 (t - t_0)^2 \quad (t \leq t_0), \quad (5.2)$$

$$\text{影响区域: 圆锥体: } (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 \leq a^2 t^2 \quad (t > 0), \quad (5.3)$$

$$\text{二维波动方程的特征锥: 锥面 } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2 (t - t_0)^2.$$

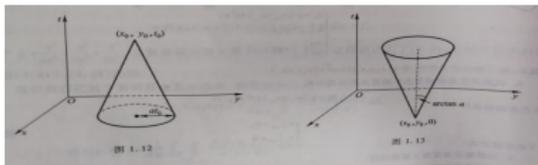
三维情形:

$$\text{依赖区域: 超平面 } t = 0 \text{ 上的球面: } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 t_0^2, \quad (5.4)$$

$$\text{决定区域: 圆锥体: } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq a^2 (t_0 - t)^2 \quad (t \leq t_0), \quad (5.5)$$

$$\text{影响区域: 锥面: } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 t^2 \quad (t > 0), \quad (5.6)$$

$$\text{三维波动方程的特征锥: 锥面: } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 (t - t_0)^2.$$



## §5 波的传播与衰减

## 2. 惠更斯 (Huygens) 原理、波的弥散

## 三维情形:

点  $(x_0, y_0, z_0, 0)$  的影响区域是锥面:  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 t^2$ . 对固定的时间  $t$ , 它表示一个以  $(x_0, y_0, z_0)$  为心、半径为  $at$  的球面, 随时间的增加, 扰动的影响面以速度  $a$  向四周扩大. 设点  $(x_1, y_1, z_1)$  与  $(x_0, y_0, z_0)$  距离为  $r$ , 故只有在  $t_0 = \frac{r}{a}$  的这一瞬间, 这一点才落到扰动面上, 过后又恢复到未扰动前的状态. 这种现象最典型的例子就是声音的传播, 从某个声源发出声音, 经过一定时间后传到耳中, 所听到的声音的长短和发出的声音所经历时间的长短一样.

有界区域  $\Omega$  任一点的扰动, 经时间  $t$  后, 传到以  $M$  为心、 $at$  为半径的球面上, 故在时刻  $t$  受到区域  $\Omega$  中初始扰动影响的区域就是以  $M$  为心、 $at$  为半径的球面的全体. 当  $t$  足够大时, 球面簇有内外两个包络面, 称外包络面为传播波的前阵面, 内包络面为传播波的后阵面. 故当初始扰动限制在空间某一局部区域内时, 波的传播有清晰的前阵面和后阵面, 这种现象在物理学中称为惠更斯 (Huygens) 原理或无后效现象.

## 二维情形:

点  $(x_0, y_0, 0)$  的影响区域不是圆周而是整个圆:  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq a^2 t^2$ , 它以速度  $a$  向外扩大. 在与  $(x_0, y_0)$  的距离为  $r$  的一点, 经过  $t_0 = \frac{r}{a}$  后开始扰动, 但随着时间的增加, 在此点的扰动影响并不消失, 仍继续发生作用.

有界区域  $\Omega$ , 观察  $\Omega$  外任一点  $M_0(x_0, y_0)$  在时刻  $t_0$  时的状态  $u(x_0, y_0, t_0)$ . 记  $d$  为自  $M_0$  到  $\Omega$  最近的点的距离. 从时刻  $t_0 = \frac{d}{a}$  开始, 点  $M_0$  处受到扰动的影响, 且扰动不会消失, 但因(4.40)中分母有  $at$  出现, 故随着时间的增加, 扰动的影响越来越弱.



## §5 波的传播与衰减

## 2. 惠更斯 (Huygens) 原理、波的弥散

因此二维情况, 局部范围中的初始扰动, 具有长期连续的后效特性, 波的传播有清晰的前阵面, 但没后阵面, 惠更斯原理不成立。

这种现象称为波的弥散, 或说这种波具有后效现象。在实际上生活中, 水波可以近似看作平面上二维波的例子。

注: 二维波动与三维波动的一个本质区别: 三维无后效现象, 二维有后效现象。事实上, 可以证明,

空间维数  $n = 1$ : 有后效现象;

空间维数  $n > 1$  且为奇数: 成立惠更斯原理, 即无后效现象;

空间维数  $n > 1$  且为偶数: 有后效现象, 即波的弥散现象发生。



## §5 波的传播与衰减

## 3. 波动方程解的衰减

由于

$$\frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}^M} \varphi dS = \frac{1}{4\pi} \iint_{|\alpha|=1} t\varphi(x_1 + at\alpha_1, x_2 + at\alpha_2, x_3 + at\alpha_3) d\omega.$$

对  $t$  求导一次, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}^M} \varphi dS \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{t}{4\pi} \iint_{S_1} \varphi(x + at\alpha) d\omega \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ \iint_{|\alpha|=1} \varphi(x + at\alpha) d\omega + \iint_{|\alpha|=1} at \sum_{i=1}^3 \varphi_{x_i}(x + at\alpha) \cdot \alpha_i d\omega \right] \\ &= \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \iint_{S_{at}^M} [\varphi(M') + \nabla \varphi(M') \cdot \overline{MM'}] dS_{M'}. \end{aligned}$$

因此, 泊松公式(4.30)可改写成

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \iint_{S_{at}^M} [t\psi(M') + \varphi(M') + \nabla \varphi(M') \cdot \overline{MM'}] dS_{M'}. \quad (5.7)$$

若  $\varphi, \psi$  具有紧支集, 则存在一个常数  $\rho > 0$ , 使  $\varphi$  及  $\psi$  在以原点为球心、 $\rho$  为半径的球  $B_\rho^0$  外恒为零

在球  $B_\rho^0$  外:  $\varphi = \psi \equiv 0$ ;

$$\text{在球 } B_\rho^0 \text{ 内: } |\varphi|, |\psi|, \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C_1 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.8)$$



## §5 波的传播与衰减

## 3. 波动方程解的衰减

故上述积分仅需在  $S_{at}^M \cap B_\rho^0$  上进行。又  $|MM'| = at$ , 故

$$\left| t\psi(M') + \varphi(M') + \nabla\varphi(M') \cdot \overline{MM'} \right| \leq C_2 t + C_3. \quad (5.9)$$

此外,

$$(S_{at}^M \cap B_\rho^0) \text{ 的面积} \leq 4\pi\rho^2. \quad (5.10)$$

于是, 在  $t \geq 1$  时,

$$\begin{aligned} |u(M, t)| &\leq \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \iint_{S_{at}^M \cap B_\rho^0} \left| t\psi(M') + \varphi(M') + \nabla\varphi(M') \cdot \overline{MM'} \right| dS_{M'} \\ &\leq \frac{1}{4\pi a^2 t^2} (C_2 t + C_3) \cdot 4\pi\rho^2 \\ &\leq C t^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{三维波动方程柯西问题解的衰减估计}) \quad (5.11)$$

事实上,

$n = 1$  (弦振动方程): 柯西问题的解在  $t \rightarrow \infty$  时无衰减性;

$n = 2$ : 柯西问题的解在  $t \rightarrow \infty$  时以  $t^{-\frac{1}{2}}$  的速度衰减趋向于零;

$n \geq 3$ : 柯西问题的解在  $t \rightarrow \infty$  时以  $t^{-\frac{n-1}{2}}$  的速度衰减趋向于零。



## §6 能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

## 1. 振动的动能和位能

为简单起见, 我们只对二维情形进行讨论。

膜振动的动能

$$U = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \rho u_t^2 dx dy. \quad (6.1)$$

首先假设薄膜没有外力作用。对  $\Omega$  内的任一子区域  $\Omega'$ , 作用在  $\Omega'$  上的张力在与  $Oxy$  平面垂直方向分量的合力等于

$$\iint_{\Omega} T \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy. \quad (6.2)$$

故张力在  $Oxy$  平面垂直方向分量的面密度为  $T \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ 。若位置改变  $\delta u$ , 则反抗张力所作的功为

$$\begin{aligned} \delta W &= - \iint_{\Omega} T \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \delta u dx dy \\ &= - \iint_{\Omega} T \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \delta u \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \delta u \right) \right] dx dy \\ &\quad + \iint_{\Omega} T \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta u) \right] dx dy \\ &= \iint_{\Omega} T \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta u) \right] dx dy - \int_{\Gamma} T \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \delta u dx dy. \end{aligned} \quad (6.3)$$



## §6 能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

## 1. 振动的动能和位能

因为

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} T \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta u) \right] dx dy &= \frac{T}{2} \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial(u + \delta u)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial(u + \delta u)}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ &\quad - \frac{T}{2} \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ &\triangleq \delta V, \end{aligned} \quad (6.4)$$

其中

$$V = \frac{T}{2} \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad \text{— (不考虑外力时的位能)} \quad (6.5)$$

考虑外力作用, 则

$$\delta W = - \iint_{\Omega} \left[ T \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F \right] \delta u dx dy, \quad (6.6)$$

$$V = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{T}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - Fu \right\} dx dy. \quad \text{— (有外力时的位能)} \quad (6.7)$$



## §6 能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

## 2. 初边值问题解的唯一性与稳定性

考虑膜振动方程的初边值问题

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f, \quad (6.8)$$

$$\begin{cases} u|_{t=\tau} = \varphi(x, y), \\ u_t|_{t=\tau} = \psi(x, y), \end{cases} \quad (6.9)$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (6.10)$$

在没有外力作用下, 上段已知

$$U = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \rho u_t^2 dx dy, \quad (6.11)$$

$$V = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} T(u_x^2 + u_y^2) dx dy. \quad (6.12)$$

这样, 不计一个常数因子, 薄膜的总能量可写为

$$E(t) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] dx dy \quad (a^2 = \frac{T}{\rho}). \quad (6.13)$$

没外力作用, 能量应守恒, 从而

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0. \quad (6.14)$$



## §6 能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

## 2. 初边值问题解的唯一性与稳定性

下从数学角度来证明(6.14), 即证满足齐次方程和齐次边界条件

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad (6.8')$$

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad (6.10')$$

的任一函数  $u(x, y, t)$  成立(6.14)。

事实上, 因  $u|_{\Gamma} = 0$ , 故  $u_t|_{\Gamma} = 0$ , 再结合利用格林公式得

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= 2 \iint_{\Omega} [u_t u_{tt} + a^2(u_x u_{xt} + u_y u_{yt})] dx dy \\ &= 2 \iint_{\Omega} [u_t u_{tt} - a^2(u_{xx} u_t + u_{yy} u_t)] dx dy \\ &\quad + 2a^2 \int_{\Gamma} (u_x u_t \cos(n, x) + u_y u_t \cos(n, y)) ds \\ &= 2 \iint_{\Omega} u_t [u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy})] dx dy. \end{aligned} \quad (6.15)$$

又因 (6.8'), 则有  $\frac{dE(t)}{dt} = 0$ , 即  $E(t) = E(0)$ 。

现用总能量守恒证初边值问题解的唯一性。事实上, 设  $u_1, u_2$  为初边值问题得两解, 则  $u = u_1 - u_2$  满足齐次方程和齐次边界条件, 因此  $E(0) = 0$ , 故  $E(t) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] dx dy = 0$ , 于是  $u_t = u_x = u_y = 0$ , 即  $u(x, y, t) = \text{const}$ 。又在  $t = 0$  时,  $u = 0$ , 故  $u \equiv 0$ 。唯一性得证。



## §6 能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

## 2. 初值问题解的唯一性与稳定性

## 定理 6.1

波动方程初值问题(6.8)-(6.10)的解如果存在的话, 它一定是唯一的。

下考虑连续依赖性。

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f, \quad (6.16)$$

$$\begin{cases} u|_{t=\tau} = \varphi(x, y), \\ u_t|_{t=\tau} = \psi(x, y), \end{cases} \quad (6.17)$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (6.18)$$

因外力不为零, 故能量不守恒, 但从(6.15)式可以得到

$$\frac{dE(t)}{dt} = 2 \iint_{\Omega} u_t f dx dy \leq \iint_{\Omega} u_t^2 dx dy + \iint_{\Omega} f^2 dx dy \leq E(t) + \iint_{\Omega} f^2 dx dy. \quad (6.19)$$

上式左右两端同乘  $e^{-t}$ , 再从 0 到  $t$  积分, 可得  $E(t) \leq e^t (E(0) + \int_0^t e^{-\tau} \iint_{\Omega} f^2 dx dy d\tau)$ , 于是对  $0 \leq t \leq T$ , 有

$$E(t) \leq C_0 \left( E(0) + \int_0^T \iint_{\Omega} f^2 dx dy dt \right) \quad (C_0 \text{ 是仅与 } T \text{ 有关的正常数}). \quad (6.20)$$



## §6 能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

## 2. 初边值问题解的唯一性与稳定性

进一步, 记

$$E_0(t) = \iint_{\Omega} u^2(x, y, t) dx dy. \quad (6.21)$$

这一项在物理中每一给出具体意义, 而在数学上加上这一项, 也称为能量, 它对研究解的稳定性非常重要. 关于  $t$  求导, 得

$$\frac{dE_0(t)}{dt} = 2 \iint_{\Omega} u u_t dx dy \leq \iint_{\Omega} u^2 dx dy + \iint_{\Omega} u_t^2 dx dy \leq E_0(t) + E(t).$$

然后两端同乘  $e^{-t}$ , 再从 0 到  $t$  积分, 可得

$$E_0(t) \leq e^t E_0(0) + e^t \int_0^t e^{-\tau} E(\tau) d\tau. \quad (6.22)$$

结合(6.20), 就得到对  $0 \leq t \leq T$  成立

$$E(t) + E_0(t) \leq C(E_0(0) + E_0(0)) + \int_0^T \iint_{\Omega} f^2 dx dy dt. \quad (C \text{ 是仅与 } T \text{ 有关的正常数}). \quad (6.23)$$

(6.20)或(6.20)称为能量不等式, 或能量估计式 (先验估计)。

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = \left( \iint_{\Omega} \varphi^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|f\|_{L^2((0,T) \times \Omega)} = \left( \int_0^T \iint_{\Omega} \varphi^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$$



## §6 能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

## 2. 初边值问题解的唯一性与稳定性

## 定理 6.2

波动方程初边值问题(6.16)-(6.18)的解在下述意义下关于初值  $(\varphi, \psi)$  与方程右端项  $f$  是稳定的: 对任给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在仅依赖于  $\varepsilon$  和  $T$  的  $\eta > 0$ , 只要

$$\begin{aligned} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^2(\Omega)} &\leq \eta, \quad \|\varphi_{1x} - \varphi_{2x}\|_{L^2(\Omega)} \leq \eta, \\ \|\varphi_{1y} - \varphi_{2y}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \eta, \quad \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^2(\Omega)} \leq \eta, \\ \|f_1 - f_2\|_{L^2((0,T)\times\Omega)} &\leq \eta, \end{aligned} \quad (6.24)$$

则  $u_1$  与  $u_2$  之差在  $0 \leq t \leq T$  上满足

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} &\leq \varepsilon, \quad \|u_{1x} - u_{2x}\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon, \\ \|u_{1y} - u_{2y}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \varepsilon, \quad \|u_{1t} - u_{2t}\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (6.25)$$

证 记  $u = u_1 - u_2$ , 则  $u$  满足

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f_1 - f_2, \quad (6.26)$$

$$\begin{cases} u|_{t=\tau} = \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y) \\ u_t|_{t=\tau} = \psi_1(x, y) - \psi_2(x, y), \end{cases} \quad (6.27)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (6.28)$$

利用能量不等式(6.23)即得所需结论。

## §6 能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

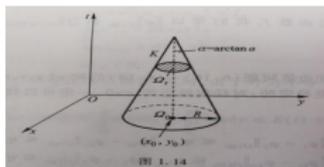
## 3. 柯西问题解的唯一性与稳定性

积分

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] dx dy \quad (6.29)$$

可能是发散的, 因此只能计算在  $(x, y)$  平面的某一有限区域  $\Omega$  上的能量。我们考察一个随时间增加而缩小的区域  $\Omega_t$ , 它在  $(x, y, t)$  空间构成一个特征锥 (图 1.14):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq (R - at)^2. \quad (6.30)$$



锥体  $K$  在平面  $t = 0$  上的截面是一个圆:

$$\Omega_0: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2. \quad (6.31)$$



## §6 能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

## 3. 柯西问题解的唯一性与稳定性

在时刻  $t$ , 区域

$$\Omega_t : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq (R - at)^2 \quad (6.32)$$

上各点处解的数值由圆(6.31)上的初始条件所完全决定, 应有  $E_t(\Omega_t) \leq E_t(\Omega_0)$ .

以下证若  $u(x, y, t)$  在特征锥  $K$  内满足齐次方程

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0, \quad (6.8')$$

则在  $K$  内任一截面  $\Omega_t$  上成立能量不等式

$$\begin{aligned} E_1(\Omega_t) &= \iint_{\Omega_t} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] dx dy \\ &\leq \iint_{\Omega_0} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] dx dy = E_1(\Omega_0). \end{aligned} \quad (6.33)$$

事实上, 只要证明  $E_1(\Omega_t)$  在  $0 \leq t \leq \frac{R}{a}$  中是单调减少函数即可。而

$$\begin{aligned} \frac{dE_1(\Omega_t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \iint_{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq (R-at)^2} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] dx dy \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^{R-at} \int_0^{2\pi r} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] ds dr \\ &= 2 \int_0^{R-at} \int_0^{2\pi r} [u_t u_{tt} + a^2(u_x u_{xt} + u_y u_{yt})] ds dr \end{aligned}$$

$$= 2 \int [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] ds \quad (r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, ds = r d\theta)$$



## §6 能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

## 3. 柯西问题解的唯一性与稳定性

在利用格林公式, 有

$$\begin{aligned} \frac{dE_1(\Omega_t)}{dt} &= 2 \int_0^{R-at} \int_0^{2\pi r} u_t [u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy})] ds dr \\ &\quad + 2 \int_{\Gamma_t} \left\{ a_2 [u_x u_t \cos(n, x) + u_y u_t \cos(n, y)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{a}{2} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] \right\} ds. \end{aligned}$$

因  $u$  满足 (6.8') 且  $u_t^2 = u_t^2 [\cos(n, x)^2 + \cos(n, y)^2]$ , 则

$$\begin{aligned} &a_2 [u_x u_t \cos(n, x) + u_y u_t \cos(n, y)] - \frac{a}{2} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] \\ &= -\frac{a}{2} [(a u_x - u_t \cos(n, x))^2 + (a u_y - u_t \cos(n, y))^2] \leq 0, \end{aligned}$$

因此

$$\frac{dE_1(\Omega_t)}{dt} \leq 0. \quad (6.34)$$

## 定理 6.3

波动方程(6.8)取初始条件

$$\begin{cases} u|_{t=\tau} = \varphi(x, y) \\ u_t|_{t=\tau} = \psi(x, y) \end{cases} \quad (6.35)$$

## §6 能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

## 3. 柯西问题解的唯一性与稳定性

**证** 只需证明方程 (6.8') 具有零初始条件的解必为零解。事实上, 利用能量不等式(6.33)推出, 如果在  $t = 0$  时,  $u(x, y, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0$ , 则  $E_1(\Omega_0) = 0$ , 从而  $E_1(\Omega_t) = 0$ , 故  $u_x = u_y = u_t = 0$ , 即  $u = \text{常数}$ 。再根据初始条件  $u$  在锥体内的连续性得出在该锥体内  $u \equiv 0$ 。由于上半空间中任一点都可以被这样的锥体所包含, 故在上半空间成立  $u \equiv 0$ 。唯一性得证。  $\square$

## 定理 6.4

波动方程 (6.8') 取初始条件(6.35)的柯西问题的解在下述意义下关于初值是稳定的: 对任给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在仅依赖于  $\varepsilon$  和  $T$  的  $\eta > 0$ , 只要

$$\begin{aligned}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^2(\Omega_0)} &\leq \eta, \quad \|\varphi_{1x} - \varphi_{2x}\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \eta, \\ \|\varphi_{1y} - \varphi_{2y}\|_{L^2(\Omega_0)} &\leq \eta, \quad \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \eta,\end{aligned}$$

则  $u_1$  与  $u_2$  之差在  $0 \leq t \leq \frac{R}{\alpha}$  上满足

$$\begin{aligned}\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega_t)} &\leq \varepsilon, \quad \|u_{1x} - u_{2x}\|_{L^2(\Omega_t)} \leq \varepsilon, \\ \|u_{1y} - u_{2y}\|_{L^2(\Omega_t)} &\leq \varepsilon, \quad \|u_{1t} - u_{2t}\|_{L^2(\Omega_t)} \leq \varepsilon,\end{aligned}\tag{6.36}$$

又在锥体  $K$  上成立

$$\|u_1 - u_2\|_{L^2(K)} \leq \sqrt{\iiint_K (u_1 - u_2)^2 dx dy dt} \leq \varepsilon.\tag{6.37}$$

## §6 能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

## 3. 柯西问题解的唯一性与稳定性

证 引进积分

$$E_0(\Omega_t) = \iint_{\Omega_t} u^2(x, y, t) dx dy. \quad (6.38)$$

关于  $t$  求导, 可得

$$\begin{aligned} \frac{dE_0(\Omega_t)}{dt} &= 2 \iint_{\Omega_t} u \frac{\partial u}{\partial t} dx dy - a \int_{\Gamma_t} u^2 ds \\ &\leq \iint_{\Omega_t} u^2 dx dy + \iint_{\Omega_t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dy \\ &\leq E_0(\Omega_t) + E_1(\Omega_t). \end{aligned}$$

与(6.22)相仿, 可得

$$E_0(\Omega_t) \leq e^t E_0(\Omega_0) + \int_0^t e^{t-\tau} E_1(\Omega_\tau) d\tau. \quad (6.39)$$

结合(6.33)就得到在  $0 \leq t \leq \frac{R}{a}$  上成立

$$E_0(\Omega_t) + E_1(\Omega_t) \leq C (E_0(\Omega_0) + E_1(\Omega_0)) \leq C_1 \eta \quad C_1 \text{ 与 } \eta \text{ 无关的正常数.} \quad (6.40)$$

取  $\eta = \frac{\varepsilon}{C_1}$ , 即成立(6.36), 再关于  $t$  积分即得(6.37)。

- ① 第一章 波动方程
- ② 第二章 热传导方程
  - 热传导方程及其定解问题的导出
  - 初边值问题的分量变量法
  - 柯西问题
  - 极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性
  - 解的渐近性态
- ③ 第三章 调和方程
- ④ 第四章 二阶线性偏微分方程的分类与总结



## §1 热传导方程及其定解问题的导出

## 1. 热传导方程的导出

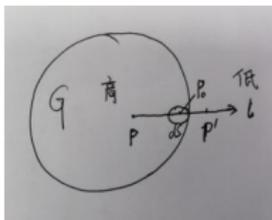
考察三维空间某物体  $G$  的热传导问题。

补充知识：方向导数与格林公式

方向导数的定义：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial l}(P_0) &= \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{u(P) - u(P_0)}{|PP_0|} \\ &= \lim_{P' \rightarrow P_0} \frac{u(P') - u(P_0)}{|P'P_0|},\end{aligned}$$

分子相减的方向是  $l$  的方向，如下图



所以  $\frac{\partial u}{\partial l} = \nabla u \cdot l$ ，若取  $l$  为  $n$ ，即为外法线方向导数。

## §1 热传导方程及其定解问题的导出

## 1. 热传导方程的导出

格林公式:

1. Gauss-Green 定理:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Gamma} v \cdot \cos(\mathbf{n}, x_i), i = 1, \dots, n$$

这里  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^n$  中的有界开子集,  $\Gamma = \partial\Omega$  是  $C^1$  边界,  $v = v(x_1, \dots, x_n)$ .

2. 取
- $v = u_i, i = 1, \dots, n$
- , 令
- $u = (u_1, \dots, u_n), x = (x_1, \dots, x_n)$
- , 则

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma} u_i \cdot \cos(\mathbf{n}, x_i) dS = \int_{\Gamma} u \cdot \mathbf{n} dS$$

这里  $\mathbf{n} = (\cos(\mathbf{n}, x_1), \dots, \cos(\mathbf{n}, x_n))$ .

- 3.
- $n = 1$
- 时, 就是
- Newton - Leibniz*
- 公式

$$\int_a^b \frac{dv}{dx} dx = \int_{\partial[a,b]} v \cdot \cos(\mathbf{n}, x) dS = v(b) \cdot \cos 0 + v(a) \cdot \cos(\pi) = v(b) - v(a).$$



## §1 热传导方程及其定解问题的导出

## 1. 热传导方程的导出

4.  $n = 2$  时, 就是 *Green* 公式

$$\begin{aligned}\int_D \operatorname{div}(Q, -P) dx dy &= \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_l P dx + Q dy = \int_l P \cos(\tau, x) + Q \cos(\tau, y) dS \\ &= \int_l -P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y) dS = \int_l (Q, -P) \cdot \mathbf{n} dS\end{aligned}$$

5.  $n = 3$  时, 就是 *Gauss* 公式

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dV &= \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV \\ &= \iint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\Gamma} P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y) + R \cos(\mathbf{n}, z) dS\end{aligned}$$

这里  $\vec{F} = (P, Q, R)$ ,  $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ .

6. 特别若取:  $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ , 则有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \Delta u dx &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u) dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\mathbf{n}, x_i) dS \\ &= \int_{\Gamma} \nabla u \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS.\end{aligned}$$



## §1 热传导方程及其定解问题的导出

## 1. 热传导方程的导出

傅里叶实验定律:

$$\text{流出热量:} \quad dQ = -k(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS dt, \quad (1.1)$$

其中  $k(x, y, z) > 0$  是物体在点  $(x, y, z)$  处的热传导系数, 负号表示热量总是从温度高的一侧流向低的一侧。

这里会问: 为什么与外法线导数有关? 事实上, 这是做实验得出来的, 比如, 一个袋子装满了水, 扎一个洞, 看它水流的方向, 其实就是外法线的方向。

任取一闭曲面  $\Gamma \subset G$ , 它所包围的区域记为  $\Omega$ , 从  $t_1$  到  $t_2$  流进此闭曲面的全部热量为

$$\text{流进热量:} \quad Q = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{\Gamma} k(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS \right] dt, \quad (1.2)$$

这里  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  表示  $u$  沿  $\Gamma$  上单位外法线方向  $\mathbf{n}$  的方向导数。

流入热量使物体温度发生变化, 从  $u(x, y, z, t_1)$  变化到  $u(x, y, z, t_2)$ , 所吸收热量

$$\iiint_{\Omega} c(x, y, z) \rho(x, y, z) [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] dx dy dz,$$

其中  $c$  为比热,  $\rho$  为密度。



## §1 热传导方程及其定解问题的导出

## 1. 热传导方程的导出

因此成立

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS dt = \iiint_{\Omega} c\rho [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] dx dy dz \quad (1.3)$$

假设  $u$  关于变量  $x, y, z$  有二阶连续偏导数  $t$  有一阶连续偏导数, 则有格林公式, 将(1.3)化为

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} dx dy dz dt \\ &= \iiint_{\Omega} c\rho \left( \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt \right) dx dy dz, \end{aligned}$$

因被积函数连续, 故可交换积分顺序, 得 (若  $k$  与  $x, y, z$  有关, 则不能提出来)

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} \left[ c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dx dy dz dt = 0. \quad (1.4)$$

再由  $t_1, t_2$  和  $\Omega$  的任意性, 有

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right). \quad \text{—非均匀的各向同性体的热传导方程} \quad (1.5)$$

不同向的话, 热传导系数为  $k_1, k_2, k_3$ , 均不同. 若物体是均匀的, 此时  $k, c, \rho$  均为常数, 记  $\frac{k}{c\rho} = a^2$ , 则有



## §1 热传导方程及其定解问题的导出

## 1. 热传导方程的导出

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \text{—非齐次热传导方程} \quad (1.6)$$

若考察的物体内部有热源（例如物体中通有电流、化学反应等），设在单位时间内单位体积所产生的热量为  $F(x, y, z, t)$ ，则(1.3)式左边应加上一项

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} F(x, y, z, t) dx dy dz dt,$$

于是，相应于(1.6)的热传导方程应改为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t), \text{—非齐次热传导方程} \quad (1.7)$$

其中

$$f(x, y, z, t) = \frac{F(x, y, z, t)}{\rho c}. \quad (1.8)$$



## §1 热传导方程及其定解问题的导出

## 2. 定解问题的提法

初边值问题：初始条件的提法：

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad (1.9)$$

其中  $\varphi(x, y, z)$  为已知函数，表示物体在  $t = 0$  时的温度分布。没有  $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}$ ，因为方程只有对  $t$  的一阶导数。

边界条件的提法：

1. 第一类边界条件（又称狄利克雷（Dirichlet）边界条件）：代表：低温固体

$$u(x, y, z, t) \Big|_{(x, y, z) \in \Gamma} = g(x, y, z, t) \quad (\text{其中 } g \text{ 是定义在 } (x, y, z) \in \Gamma, 0 \leq t \leq T \text{ 上的已知函数}). \quad (1.10)$$

2. 第二类边界条件（又称诺伊曼（Neumann）边界条件）：代表：液体，流动气体

根据傅里叶定律

$$\frac{dQ}{dSdt} = -k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}},$$

于是边界条件写为

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{(x, y, z) \in \Gamma} = g(x, y, z, t) \quad (\text{其中 } \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \text{ 单位外法向导数, } g \text{ 表示同上}). \quad (1.11)$$

3. 第三类边界条件（又称罗宾（Robin）边界条件）：代表：空气，高温液体

热传导实验定律（牛顿定律）：从物体流到介质中的热量和物体与介质两者温度差成正比

$$dQ = k_1(u - u_1)dSdt \quad (\text{这里 } k_1 > 0 \text{ 表示热交换系数}), \quad (1.12)$$



## §1 热传导方程及其定解问题的导出

## 2. 定解问题的提法

结合傅里叶定律有

$$-k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS dt = k_1(u - u_1) dS dt \implies k_1 u + k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = k_1 u_1.$$

于是边界条件可写为

$$\left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u \right) \Big|_{(x,y,z) \in \Gamma} = g(x, y, z, t) \quad (\text{其中 } \sigma > 0, g \text{ 表示同上}). \quad (1.13)$$

柯西问题: 初始条件为

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z) \quad (-\infty < x, y, z < +\infty). \quad (1.14)$$

一维热传导方程: 均匀细杆 (电线), 假设侧面绝热

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.15)$$

二维热传导方程: 薄片、半导体、手机卡片等, 假设侧面绝热

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (1.16)$$

同样, 对低维热传导方程也可提上述的柯西问题与初边值问题。



## §1 热传导方程及其定解问题的导出

## 3. 扩散方程

分子扩散过程：气体的扩散，液体的渗透，半导体材料中的杂质扩散等。

扩散定律与质量守恒定律

$$dm = -D(x, y, z) \frac{\partial N}{\partial \mathbf{n}} dS dt, \quad (1.17)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \iint_{\Gamma} D \frac{\partial N}{\partial \mathbf{n}} dS dt = \iiint_{\Omega} [N(x, y, z, t_2) - N(x, y, z, t_1)] dx dy dz, \quad (1.18)$$

其中  $N$  表示扩散物质的浓度， $D(x, y, z)$  为扩散系数。

于是，与热传导方程推导形式类似，可写出扩散方程为

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial N}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial N}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial N}{\partial z} \right). \quad (1.19)$$

如果  $D = a^2$ ，则扩散方程 (1.19) 就与热传导方程 (1.16) 形式完全相同。

对于扩散方程，也可以提出相应的柯西问题于初边值问题等定解问题。



## §2 初边值问题的分量变量法

## 1. 一个空间变量的情形

一维热传导方程 (第三类边界条件), 例如, 烧火的炉棍, 手拿的一短为  $x = 0$ , 烧火的一端为  $x = l$ 。用分离变量法求解第三边值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad (t > 0, 0 < x < l), & (2.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 0 : u = \varphi(x), & (2.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 : u = 0, & (2.3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = l : u_x + hu = 0, & (2.4) \end{cases}$$

其中  $h$  为正常数。

令  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , 代入方程得

$$X(x)T'(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0,$$

在解非零处有

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)},$$

上式左边与  $t$  无关, 右边与  $x$  无关, 故它应是一个与两者都无关的常数, 记为  $-\lambda$ , 则

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (2.5)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (2.6)$$



## §2 初边值问题的分量变量法

## 1. 一个空间变量的情形

先考虑(2.6)。由边界条件知

$$X(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0. \quad (2.7)$$

(i) 当  $\lambda < 0$  时, 方程(2.6)的通解为

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

要使它满足条件(2.7), 就必须

$$C_1 + C_2 = 0,$$

$$C_1(h + \sqrt{-\lambda})e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2(h - \sqrt{-\lambda})e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0.$$

只能  $C_1 = C_2 = 0$ 。故无非零解。

(ii) 当  $\lambda = 0$  时, 方程(2.6)的通解为

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

要使它满足条件(2.7), 也只有零解。

(iii) 当  $\lambda > 0$  时, 方程(2.6)的通解为



## §2 初边值问题的分量变量法

## 1. 一个空间变量的情形

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad (2.8)$$

其中  $A$ 、 $B$  为待定常数。于是由条件(2.7)知

$$0 = X(0) = A, 0 = X'(l) + hX(l) = B\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}l) + hB \sin(\sqrt{\lambda}l). \quad (2.9)$$

要使  $B \neq 0$ , 就必须有

$$\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}l) + h \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0, \quad (2.10)$$

即  $\lambda$  是下面超越方程的正解:

$$\tan \sqrt{\lambda}l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}. \quad (2.11)$$

令

$$v = \sqrt{\lambda}l, \quad (2.12)$$

则(2.11)式变为

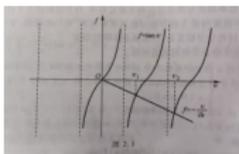
$$\tan v = -\frac{v}{lh}. \quad (2.13)$$



## §2 初边值问题的分量变量法

## 1. 一个空间变量的情形

利用图解法知, 方程(2.13)有可列无穷多个正根  $v_k > 0 (k = 1, 2, \dots)$ , 满足  $(k - \frac{1}{2})\pi < v_k < k\pi$ .



从而

$$\lambda_k = \left(\frac{v_k}{l}\right)^2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

因此

$$X_k = B_k \sin \sqrt{\lambda_k} x = \sin v_k x, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

将  $\lambda = \lambda_k$  代入方程(2.5)可得

$$T_k(t) = C_k e^{-a^2 \lambda_k t} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.16)$$

于是得到一列变量可分离的特解



## §2 初边值问题的分量变量法

## 1. 一个空间变量的情形

由于方程和边界条件都是齐次的，故可利用叠加原理得到形式解

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-a^2 \lambda_k t} \sin \sqrt{\lambda_k} x. \quad (2.18)$$

由(2.2)知， $\varphi(x)$  满足

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\sqrt{\lambda_k} x). \quad (2.19)$$

为确定系数  $A_k$ ，须先证明固有函数系  $\{X_k\} = \{\sin \sqrt{\lambda_k} x\}$  在  $[0, l]$  上正交。设固有函数  $X_m$  和  $X_n$  分别对应于不同的固有值  $\lambda_m$  和  $\lambda_n$ ，即

$$X_n'' + \lambda_n X_n = 0, \quad X_m'' + \lambda_m X_m = 0.$$

以  $X_n$  和  $X_m$  分别乘上面第一式和第二式，得到

$$X_m X_n'' + \lambda_n X_m X_n = 0,$$

$$X_n X_m'' + \lambda_m X_m X_n = 0.$$

两式相减后再在  $[0, l]$  上积分有

$$\int_0^l (X_m X_n'' - X_n X_m'') dx + (\lambda_n - \lambda_m) \int_0^l X_m X_n dx = 0.$$



## §2 初边值问题的分量变量法

## 1. 一个空间变量的情形

于是

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^l X_m X_n dx = (X_m X_n' - X_n X_m')|_0^l = 0.$$

由于  $\lambda_n \neq \lambda_m$ , 故得固有函数系的正交性:

$$\int_0^l X_m X_n dx = \int_0^l \sin \sqrt{\lambda_m} x \sin \sqrt{\lambda_n} x dx = 0, \quad m \neq n. \quad (2.20)$$

记

$$\begin{aligned} M_k &= \int_0^l X_k^2 dx = \int_0^l \sin^2 \sqrt{\lambda_k} x dx \\ &= \int_0^l \frac{1 - \cos 2\sqrt{\lambda_k} x}{2} dx = \frac{l}{2} - \frac{\sin 2\sqrt{\lambda_k} l}{4\lambda_k} \\ &= \frac{l}{2} + \frac{h}{2(h^2 + \lambda_k)}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

于是利用正交性(2.20)可得

$$A_k = \frac{1}{M_k} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \sqrt{\lambda_k} \xi d\xi. \quad (2.22)$$

从而可得问题(2.1)-(2.4)的形式解为

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{M_k} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \sqrt{\lambda_k} \xi d\xi \cdot e^{-a^2 \lambda_k t} \sin(\sqrt{\lambda_k} x). \quad (2.23)$$



## §2 初边值问题的分量变量法

## 1. 一个空间变量的情形

下面我们验证得到的形式解确实是问题(2.1)-(2.4)的经典解。事实上, 当  $\varphi(x)$  为连续有界函数时, 表达式(2.23)中含有因子  $e^{-a^2\lambda_k t}$ , 因此对任意的  $\delta > 0$ , 当  $t \geq \delta$  时, 对任意的  $p > 0$  级数  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^p e^{-a^2\lambda_k t}$  均是一致收敛的。而由  $\varphi$  为有界函数 ( $|\varphi(x)| \leq M$ ) 及(2.21)式, 可得

$$\left| \int_0^l \varphi(\xi) \sin \sqrt{\lambda_k} \xi d\xi \right| \leq M, \quad \frac{1}{M_k} \leq \frac{2}{l}. \quad (2.24)$$

从而, 表达式(2.23)中的级数在  $t > 0$  时, 关于  $x$  和  $t$  都是无穷次可导的, 并且求导与求和可交换。又由于表达式(2.23)中的级数的每一项都满足方程和边界条件, 从而表达式(2.23)中的级数在  $t > 0$  时也满足方程和边界条件。另外, 当  $t \rightarrow 0$  时, 在  $\varphi(x)$  满足  $\varphi(x) \in C^2, \varphi(0) = 0, \varphi'(l) + h\varphi(l) = 0$ , 易证表达式(2.23)中的级数趋向于初值  $\varphi(x)$ 。由此完成了  $u$  是原问题经典解的验证。



## §2 初边值问题的分量变量法

## 2\*. 圆形区域上的热传导方程



## §3 柯西问题

## 1. 傅里叶变换及其基本性质

设  $f(x)$  是定义在  $(-\infty, \infty)$  上的函数且  $f \in C^1[-l, l], \forall l > 0$ , 则  $f(x)$  可展开为傅里叶级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right), \quad (3.1)$$

且

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{n\pi}{l} \xi d\xi, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.2)$$

将(3.2)代入(3.1), 得到

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{n\pi}{l} (x - \xi) d\xi.$$

注: 若  $f(x)$  以  $2l$  为周期函数, 则  $f(x)$  可展为 Fourier 级数。

**补充定理:** 设函数  $f(x)$  以  $2l$  为周期, 在  $[-l, l]$  上逐段可微, 则它的 Fourier 级数在每一点  $x = x_0$  处处收敛于  $\delta_0 = \frac{f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)}{2}$ 。特别  $f \in C^1$ , 则  $f$  的 Fourier 级数处处收敛于  $f(x)$ 。



## §3 柯西问题

## 1. 傅里叶变换及其基本性质

**问题:** 很多函数不是周期函数, 不能展成为 Fourier 级数, 怎么办? 方法: 先将其看成  $[-l, l]$  上得周期函数, 得到 Fourier 级数, 再对其加一定条件 (比如绝对可积), 取极限  $l \rightarrow \infty$ , 看成极限函数。

现设  $f(x)$  绝对可积, 即  $\int_{-\infty}^{\infty} |f| dx < +\infty$ , 那么  $\left| \int_{-l}^l f(x) dx \right| \leq \int_{-l}^l |f| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f| dx < +\infty$ , 于是

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = 0.$$

于是, 由补充定理知, 当  $l \rightarrow \infty$  时,

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{n\pi}{l} (x - \xi) d\xi.$$

若记  $\lambda_1 = \frac{\pi}{l}, \dots, \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \dots \Delta\lambda = \Delta\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi}{l}$ , 则形式地得到

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \Delta\lambda_n \int_{-l}^l f(\xi) \cos \lambda_n (x - \xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda (x - \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.3)$$

积分表达式 (3.3) 称为  $f(x)$  的傅里叶积分。

**注:** 若  $f(x)$  绝对可积, 则在  $f(x)$  本身及其导数为连续的点,  $f(x)$  的傅里叶积分收敛于  $f(x)$  在该点的函数值。



## §3 柯西问题

## 1. 傅里叶变换及其基本性质

因为  $\cos \lambda(x - \xi)$  关于  $\lambda, x$  不易分离, 但注意到  $\cos \lambda(x - \xi)$  是  $\lambda$  的偶函数,  $\sin \lambda(x - \xi)$  是  $\lambda$  的奇函数, 利用 Euler 公式 ( $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ) 化为指数形式, 可将  $\lambda, x$  分离, 于是(3.3)式可写为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) [\cos \lambda(x - \xi) + i \sin \lambda(x - \xi)] d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

从而, 若令

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi := F[f], \quad -f(x) \text{ 的傅里叶变换} \quad (3.5)$$

就有

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda := F^{-1}[g], \quad -g(\lambda) \text{ 的傅里叶逆变换} \quad (3.6)$$

**补充定理:** 如果  $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$  且  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < +\infty$ , 则  $f$  的 Fourier 变换  $g$  存在, 且  $g(\lambda)$  的 Fourier 逆变换也存在且为  $f(x)$ 。



## §3 柯西问题

## 1. 傅里叶变换及其基本性质

性质 1 Fourier 变换是线性变换, 即对任意复数  $\alpha, \beta$  以及函数  $f_1, f_2$ , 成立

$$F[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha F[f_1] + \beta F[f_2]. \quad (3.7)$$

定义: 设  $f_1(x), f_2(x)$  在  $(-\infty, \infty)$  上有定义, 若

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-t)f_2(t)dt \quad (3.8)$$

存在, 则称  $f(x)$  为  $f_1(x)$  与  $f_2(x)$  的卷积, 记为  $f_1 * f_2$ .

注: 当  $f_1, f_2$  绝对可积时,  $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$ , 即卷积可交换, 即

$$f_1 * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\tau)f_2(\tau)d\tau = f_2 * f_1(x).$$

事实上, 令  $t = x - \tau$ , 则  $dt = -d\tau$ , 所以

$$f_1 * f_2(x) = \int_{\infty}^{-\infty} f_1(t)f_2(x-t) - dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-t)f_1(t)dt = f_2 * f_1(x).$$

性质 2  $f_1(x), f_2(x)$  绝对可积, 则  $f_1(x)$  与  $f_2(x)$  的卷积的傅里叶变换等于  $f_1(x)$  与  $f_2(x)$  的傅里叶变换的乘积, 即

$$F[f_1 * f_2] = F[f_1] \cdot F[f_2]. \quad (3.9)$$



## §3 柯西问题

## 1. 傅里叶变换及其基本性质

证 由于  $f_1(x), f_2(x)$  绝对可积, 故积分可交换顺序, 因此

$$\begin{aligned} F[f_1 * f_2] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} dx \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-t)f_2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-t)e^{-i\lambda x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)e^{-i\lambda(t+\xi)} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-i\lambda t} dt \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)e^{-i\lambda\xi} d\xi \\ &= F[f_1] \cdot F[f_2]. \end{aligned}$$

□

性质 2'  $f_1(x), f_2(x)$  绝对可积, 则  $f_1(x)$  与  $f_2(x)$  的卷积的傅里叶逆变换等于  $f_1(x)$  与  $f_2(x)$  的傅里叶逆变换的乘积乘以  $2\pi$ , 即

$$F^{-1}[f_1 * f_2] = 2\pi F^{-1}[f_1] \cdot F^{-1}[f_2].$$

证 同样因  $f_1(x), f_2(x)$  绝对可积, 故可交换积分顺序, 得

$$\begin{aligned} F^{-1}[f_1 * f_2] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} dx \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-t)f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-t)e^{i\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)e^{i\lambda(t+\xi)} d\xi = 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{i\lambda t} dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)e^{i\lambda\xi} d\xi \\ &= 2\pi F^{-1}[f_1] \cdot F^{-1}[f_2]. \end{aligned}$$

□



## §3 柯西问题

## 1. 傅里叶变换及其基本性质

性质 3  $f_1(x), f_2(x)$  绝对可积, 则  $f_1(x)$  与  $f_2(x)$  的乘积的傅里叶变换等于  $f_1(x)$  与  $f_2(x)$  的傅里叶变换的卷积乘以  $\frac{1}{2\pi}$ , 即

$$F[f_1 \cdot f_2] = \frac{1}{2\pi} F[f_1] * F[f_2]. \quad (3.10)$$

证 令  $F^{-1}[g_1] = f_1, F^{-1}[g_2] = f_2$ , 则  $g_1 = F[f_1], g_2 = F[f_2]$ 。由性质 2' 知

$$F^{-1}[g_1 * g_2] = 2\pi F^{-1}[g_1] \cdot F^{-1}[g_2].$$

于是

$$F\left[F^{-1}(g_1 * g_2)\right] = 2\pi F\left[F^{-1}[g_1] \cdot F^{-1}[g_2]\right],$$

即  $F[f_1] * F[f_2] = 2\pi F[f_1 \cdot f_2]$ 。因此有  $F[f_1 \cdot f_2] = \frac{1}{2\pi} F[f_1] * F[f_2]$ 。□

性质 3'  $f_1(x), f_2(x)$  绝对可积, 则  $f_1(x)$  与  $f_2(x)$  的乘积的傅里叶逆变换等于  $f_1(x)$  与  $f_2(x)$  的傅里叶逆变换的卷积, 即

$$F^{-1}[f_1 \cdot f_2] = F^{-1}[f_1] * F^{-1}[f_2].$$



## §3 柯西问题

## 1. 傅里叶变换及其基本性质

性质 4 如果  $f(x), f'(x)$  都可进行傅里叶变换, 且当  $|x| \rightarrow 0$  时,  $f(x) \rightarrow 0$ , 则成立

$$F[f'(x)] = i\lambda F[f(x)]. \quad (3.11)$$

证 事实上

$$\begin{aligned} F[f'(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\lambda x} dx \\ &= [f(x)e^{-i\lambda x}] \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda f(x)e^{-i\lambda x} dx \\ &= i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx = i\lambda F[f(x)]. \end{aligned}$$

□

性质 4' 如果  $f(x), \dots, f^n(x)$  都可进行傅里叶变换, 且当  $|x| \rightarrow 0$  时,  $f(x), \dots, f^{n-1}(x) \rightarrow 0$ , 则成立

$$F[f^n(x)] = (i\lambda)^n F[f(x)].$$



## §3 柯西问题

## 1. 傅里叶变换及其基本性质

性质 5 如果  $f(x)$ ,  $xf(x)$  都可进行傅里叶变换, 那么

$$F[-ixf(x)] = \frac{d}{d\lambda} F[f]. \quad (3.12)$$

证

$$F[-ixf(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} -ixf(x)e^{-i\lambda x} dx = \frac{d}{d\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx = \frac{d}{d\lambda} F[f].$$

□

性质 5' 如果  $f(x)$ ,  $xf(x)$ ,  $\dots$ ,  $x^m f(x)$  都可进行傅里叶变换, 那么

$$F[(-ix)^m f(x)] = \frac{d^m}{d\lambda^m} F[f].$$

完全类似可定义多自变量函数的傅里叶变换和傅里叶逆变换:

$$F[f] = g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) e^{-i(x_1\lambda_1 + \dots + x_n\lambda_n)} dx_1 \dots dx_n, \quad (3.13)$$

$$F^{-1}[g(\lambda)] = f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) e^{i(x_1\lambda_1 + \dots + x_n\lambda_n)} d\lambda_1 \dots d\lambda_n. \quad (3.14)$$

注: 多自变量函数的傅里叶变换也有类似的性质 1-5, 这里不再一一列举。



## §3 柯西问题

## 2. 热传导方程柯西问题的求解

利用傅里叶变换求解热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (3.15)$$

(i) 先求解齐次热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (3.17)$$

关于  $x$  进行傅里叶变换, 并记

$$F[u(x, t)] = \tilde{u}(\lambda, t),$$

$$F[\varphi(x)] = \tilde{\varphi}(\lambda).$$

(3.17)两边关于  $x$  进行傅里叶变换, 再利用性质 4, 就有

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = -a^2 \lambda^2 \tilde{u}, \quad (3.19)$$

类似可得

$$\tilde{u}(x, 0) = \tilde{\varphi}(\lambda). \quad (3.20)$$



## §3 柯西问题

## 2. 热传导方程柯西问题的求解

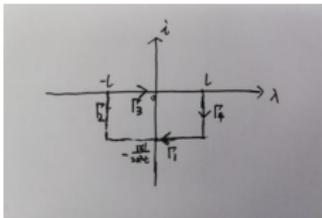
求解(3.19)-(3.20) (关于  $\lambda$  的常微分方程), 得

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}. \quad (3.21)$$

函数  $e^{-a^2\lambda^2 t}$  得傅里叶逆变换为

$$\begin{aligned} F^{-1}[e^{-a^2\lambda^2 t}] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2\lambda^2 t - i\lambda x)} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t (\lambda - \frac{ix}{2a^2 t})^2} d\lambda e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}. \end{aligned}$$

因为  $e^{-a^2 t (\lambda - \frac{ix}{2a^2 t})^2}$  是解析函数, 则由复变函数中的解析函数的 Cauchy 积分定理知, 解析函数关于封闭路线的积分为零, 于是我们构造如下的封闭路线, 然后再让  $l \rightarrow \infty$  即可。



于是, 令  $z = \lambda + iy$ , 则



## §3 柯西问题

## 2. 热传导方程柯西问题的求解

$$0 = \int_{\Gamma_1} e^{-a^2 tz^2} dz + \int_{\Gamma_2} e^{-a^2 tz^2} dz + \int_{\Gamma_3} e^{-a^2 tz^2} dz + \int_{\Gamma_4} e^{-a^2 tz^2} dz.$$

又因为

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} e^{-a^2 tz^2} dz &= \int_{-l}^l e^{-a^2 t \lambda^2} d\lambda, \\ \int_{\Gamma_1} e^{-a^2 tz^2} dz &= \int_l^{-l} e^{-a^2 t (\lambda - \frac{ix}{2a^2 t})^2} d\lambda = - \int_{-l}^l e^{-a^2 t (\lambda - \frac{ix}{2a^2 t})^2} d\lambda. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_3} e^{-a^2 tz^2} dz &= \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^l e^{-a^2 t \lambda^2} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t \lambda^2} d\lambda, \\ \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} e^{-a^2 tz^2} dz &= - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t (\lambda - \frac{ix}{2a^2 t})^2} d\lambda. \end{aligned}$$

注意到  $|\Gamma_4| = \frac{|x|}{2a^2 t}$ , 当  $y \in (-\frac{x}{2a^2 t}, 0)$  时,



## §3 柯西问题

## 2. 热传导方程柯西问题的求解

$$\left| e^{-a^2 tz^2} \right| = \left| e^{-a^2 t(-l+iy)^2} \right| = \left| e^{-a^2 t(l^2 - y^2 + 2ily)} \right| \leq e^{-a^2 tl^2} \cdot e^{\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

从而

$$\left| \int_{\Gamma_4} e^{-a^2 tz^2} dz \right| \leq \int_{\Gamma_4} \left| e^{-a^2 tz^2} \right| dz \leq e^{-a^2 tl^2} \cdot e^{\frac{x^2}{4a^2 t}} \cdot \frac{|x|}{2a^2 t} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0.$$

同理

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} e^{-a^2 tz^2} dz = 0.$$

因此我们得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t(\lambda - \frac{ix}{2a^2 t})^2} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t\lambda^2} d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}$$

所以

$$F^{-1}[e^{-a^2 \lambda^2 t}] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$



## §3 柯西问题

## 2. 热传导方程柯西问题的求解

于是,再由性质 2 和(3.20)知,问题(3.17)-(3.18)的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi. \text{---泊松公式} \quad (3.22)$$

(ii) 再求解非齐次热传导方程具有其次初始条件的柯西问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \end{cases} \quad (3.23)$$

$$u(x, 0) = 0. \quad (3.24)$$

由齐次化原理,此柯西问题的解为

$$u(x, t) = \int_0^t w(x, t; \tau) d\tau, \quad (3.25)$$

其中  $w = w(x, t; \tau)$  为下述柯西问题的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad t > \tau, \end{cases} \quad (3.26)$$

$$w(x, t; \tau)|_{t=\tau} = f(x, \tau). \quad (3.27)$$

变量替换  $t' = t - \tau$ , 则

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t'} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad t' > 0, \\ w(x, t' + \tau; \tau)|_{t'=0} = f(x, \tau). \end{cases}$$



## §3 柯西问题

## 2. 热传导方程柯西问题的求解

于是, 利用(3.22), 知问题(3.23)-(3.24)的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi d\tau. \quad (3.28)$$

最后, 由叠加原理、(3.22)及(3.28)就得到了柯西问题(3.15)-(3.16)的形式解为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (3.29)$$



## §3 柯西问题

## 3. 解的存在性

下只对齐次方程的情形验证。假设  $\varphi(x)$  连续有界,  $|\varphi(x)| \leq M$ 。注意到  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = \sqrt{\pi}$ , 故由(3.22)知

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq M \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi \\ &\stackrel{\zeta = \frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}}{=} M \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = M, \end{aligned}$$

这说明积分(3.22)收敛且由它表达的函数  $u(x, t)$  有与初值相同的界。

还需证明, 当  $t > 0$  时, 积分(3.22)所表达的函数  $u(x, t)$  满足方程(3.17)。事实上, 不难验证, 积分号下的函数  $u_1(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$  关于变量  $t, x$ , 在  $t > 0$  时满足方程(3.17)。因此, 只要可通过积分号下求导就行了。但由于(3.22)式的积分是无穷的, 为保证通过积分号下求导, 必须证明在积分号下求导后所得的积分是一致收敛的。先对  $x$  求一次导所构成的积分写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \frac{\partial u_1}{\partial x} d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-(x-\xi)\varphi(\xi)}{2a^2 t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi.$$

作变换  $\eta = \xi - x$ , 当  $t \geq \delta > 0$  时, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-(x-\xi)\varphi(\xi)}{2a^2 t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi &\leq \frac{M}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\eta|}{2a^2 t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\eta^2}{4a^2t}} d\eta \\ &\leq \frac{M}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \frac{|\eta|}{a^2 t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\eta^2}{4a^2t}} d\eta \\ &\leq \frac{M}{a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \frac{|\eta|}{2a^2 \delta^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\eta^2}{4a^2t}} d\eta < +\infty, \end{aligned}$$



## §3 柯西问题

## 3. 解的存在性

因此当  $t > 0$  时, 对任意的  $(t, x)$  总存在一个邻域  $\omega$ , 使上述积分关于  $(t, x) \in \omega$  一致收敛。因此, 成立

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-(x-\xi)\varphi(\xi)}{2a^2 t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi,$$

即对  $x$  的一次求导能通过积分号。同理可证明对(3.22)的其他导数也能在积分号下求导而得。因此当  $t > 0$  时由积分(3.22)所表达的函数  $u(x, t)$  满足方程(3.17)。

最后证, 由(3.22)所确定的函数  $u(x, t)$  满足初始条件(3.18), 即证对任意的  $x_0$ , 当  $t \rightarrow 0, x \rightarrow x_0$  时  $u(x, t) \rightarrow \varphi(x_0)$ 。为此, 要证明对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 一定可找到  $\delta > 0$ , 使当  $|x - x_0| \leq \delta, t \leq \delta$  时, 成立

$$|u(x, t) - \varphi(x_0)| \leq \varepsilon.$$

又注意到  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = 1$ , 再在(3.22)中令  $\zeta = \frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}$ , 可得

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2} \varphi(x_0) d\zeta,$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2a\sqrt{t}\zeta) e^{-\zeta^2} d\zeta.$$

因此

$$u(x, t) - \varphi(x_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x + 2a\sqrt{t}\zeta) - \varphi(x_0)] e^{-\zeta^2} d\zeta.$$



## §3 柯西问题

## 3. 解的存在性

对所给的  $\varepsilon > 0$ , 取  $N > 0$  足够大, 使

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_N^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta \leq \frac{\varepsilon}{6M}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-N} e^{-\zeta^2} d\zeta \leq \frac{\varepsilon}{6M}.$$

对固定的  $N$ , 由  $\varphi(x)$  的连续性知, 可找到  $\delta > 0$ , 使当  $|x - x_0| \leq \delta, 0 < t \leq \delta$  时成立

$$|\varphi(x + 2a\sqrt{t}\zeta) - \varphi(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (-N \leq \zeta \leq N).$$

因此

$$\begin{aligned} |u(x, t) - \varphi(x_0)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x + 2a\sqrt{t}\zeta) - \varphi(x_0)] e^{-\zeta^2} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^N [\varphi(x + 2a\sqrt{t}\zeta) - \varphi(x_0)] e^{-\zeta^2} d\zeta \\ &\quad + \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-N} e^{-\zeta^2} d\zeta + \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_N^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^N e^{-\zeta^2} d\zeta + 4M \frac{\varepsilon}{6M} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

这样我们就验证了泊松积分(3.22)所确定的函数确实是问题(3.17)-(3.18)的有界解。

可类似证明(3.29)所表示的函数满足非齐次方程(3.15)及初始条件(3.16)。



## §4 极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

## 1. 极值原理

考虑的是齐次的热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.1)$$

## 定理 4.1

(极值原理) 设  $u(x, t)$  在矩形  $R_T\{\alpha \leq x \leq \beta, 0 \leq t \leq T\}$  上连续, 且在矩形区域内部满足热传导方程(4.1), 则它在矩形的两个侧边 ( $x = \alpha$  及  $x = \beta, 0 \leq t \leq T$ ) 及底边 ( $t = 0, \alpha \leq x \leq \beta$ ) 上取到其最大和最小值。换言之, 若以  $\Gamma_T$  表示  $R_T$  的两个侧边及底边所组成的边界曲线 (通称为抛物边界), 那么成立着

$$\max_{R_T} u(x, t) = \max_{\Gamma_T} u(x, t), \quad \min_{R_T} u(x, t) = \min_{\Gamma_T} u(x, t).$$

**证** 将  $-u$  换成  $u$ , 最小值的情形就变为最大值的情形, 因此只考虑最大值的情形。以  $M$  表示  $u(x, t)$  在  $R_T$  上的最大值, 以  $m$  表示  $u(x, t)$  在  $\Gamma_T$  上的最大值。

反正法: 如果定理不真, 那么  $M > m$ 。则一定存在一点  $(x^*, t^*) \in R_T \setminus \Gamma_T (0 < t^* \leq T, \alpha < x^* < \beta)$  使  $u(x^*, t^*) = M$ 。作辅助函数

$$V(x, t) = u(x, t) + \frac{M - m}{4l^2} (x - x^*)^2,$$

其中  $l = \beta - \alpha$ 。



## §4 极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

## 1. 极值原理

在  $\Gamma_T$  上

$$V(x, t) < m + \frac{M - m}{4} = \frac{M}{4} + \frac{3m}{4} = \theta M \quad (0 < \theta < 1),$$

而

$$V(x^*, t^*) = M,$$

因此, 函数  $V(x, t)$  它也不在  $\Gamma_T$  上取到最大值. 设  $V(x, t)$  在点  $(x_1, t_1) \in R_T \setminus \Gamma_T$  ( $0 < t_1 \leq T, \alpha < x_1 < \beta$ ) 取到最大值. 固定  $t_1$ , 若  $t_1 < T$ , 由费马定理知  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ ; 若  $t_1 = T$ , 那么  $\frac{\partial V}{\partial t} \geq 0$ . 再由泰勒展开式知

$$\begin{aligned} 0 &\geq V(x_1, t) - V(x_1, t_1) = V_x(x_1, t_1)(x - x_1) + V_{xx}(x_1, t_1) \frac{(x - x_1)^2}{2!} + o(x - x_1)^2 \\ &= V_{xx}(x_1, t_1) \frac{(x - x_1)^2}{2!} + o(x - x_1)^2, \Rightarrow V_{xx}|_{(x_1, t_1)} \leq 0, \end{aligned}$$

因此在点  $(x_1, t_1)$  处成立

$$\frac{\partial V}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \geq 0;$$



## §4 极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

## 1. 极值原理

但由直接计算并利用(4.1)得

$$\frac{\partial V}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{M - m}{2l^2} = -a^2 \frac{M - m}{2l^2} < 0,$$

这就得到了矛盾, 说明假设不成立。定理证毕。 □

注: 为什么给抛物边界? 因为我们研究的问题初始温度于边界温度是已知的, 对应的就是抛物边界。

注: 由定理 4.1 的证明可见, 若  $u$  是非齐次方程  $u_t - u_{xx} = f$  (其中  $f \leq 0$ , 相当于内部有吸热的) 的解, 则成立  $\max_{R_T} u(x, t) = \max_{\Gamma_T} u(x, t)$ , 最小值不一定成立; 若  $u$  是非齐次方程  $u_t - u_{xx} = f$  (其中  $f \geq 0$ , 相当于内部有热源) 的解, 则成立  $\min_{R_T} u(x, t) = \min_{\Gamma_T} u(x, t)$ , 最大值不一定成立。



## §4 极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

## 2. 初边值问题解的唯一性和稳定性

## 定理 4.2

热传导方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u(\alpha, t) = \mu_1(t), u(\beta, t) = \mu_2(t), \end{cases} \quad (4.2)$$

在区域  $R_T$  上的解是唯一的, 而且连续地依赖于边界  $\Gamma_T$  上所给的初始条件及边界条件。

证 设  $u_1, u_2$  是问题(4.2)的两解, 令  $u = u_1 - u_2$ , 则  $u$  满足

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(\alpha, t) = u(\beta, t) = 0. \end{cases}$$

由极值原理知, 在  $R_T$  上  $u \equiv 0$ , 即解唯一。

另外, 如果相应于  $\mu_1, \mu_2, \varphi_1$  和  $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \tilde{\varphi}_1$  的初边值问题的两个解为  $u_1$  和  $\tilde{u}_1$ 。令  $u = u_1 - \tilde{u}_1$ , 则  $u$  满足

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = \varphi_1(x) - \tilde{\varphi}_1(x), \\ u(\alpha, t) = \mu_1(t) - \tilde{\mu}_1(t), \quad u(\beta, t) = \mu_2(t) - \tilde{\mu}_2(t). \end{cases}$$



## §4 极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

## 2. 初边值问题解的唯一性和稳定性

若在  $\Gamma_T$  上成立

$$|\mu_1(t) - \tilde{\mu}_1(t)| + |\mu_2(t) - \tilde{\mu}_2(t)| + |\varphi_1(x) - \tilde{\varphi}_1(x)| \leq \varepsilon,$$

则由极值原理知, 在  $R_T$  内成立

$$|u_1 - \tilde{u}_1| \leq \varepsilon,$$

即稳定性成立。定理得证。 □

定理 4.1 不能直接应用于热传导方程的第二或第三类边界条件的初边值问题。为此, 先考虑下面的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \\ u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x} + hu \right) \Big|_{x=l} = \mu_2(t), \\ u|_{t=0} = \varphi_1(x). \end{cases} \quad (4.3)$$

其中  $h$  是已给定的正常数。



## §4 极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

## 2. 初边值问题解的唯一性和稳定性

先讨论问题(4.3)的唯一性。即要证明齐次初边值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x} + hu \right) \Big|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

只要零解。事实上,若  $u$  不恒等于零,则有三种情况

$$\begin{cases} (1) u \text{ 在一段恒为负, 则有负的极小值,} \\ (2) u \text{ 在一段恒为正, 则有正的极大值,} \\ (3) u \text{ 在一段有正有负, 则有正的极大值和负的极小值.} \end{cases}$$

从而  $u$  在闭区间  $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$  上必然取到正的极大值或负的极小值。由定理 4.1 知,正的极大值必在边界  $x=0, x=l$  或  $t=0$  上取到。而由(4.4)知,它不可能在  $x=0$  与  $t=0$  上取到正的极大值。若在  $x=l$  上取到,则成立  $\frac{\partial u}{\partial x} \geq 0, h > 0$  与  $x=l$  上的边界条件矛盾。同理  $u$  也取不到负的极小值。从而  $u \equiv 0$ , 于是问题(4.3)解唯一。

**稳定性:** 先考虑正的极大值的情形。若  $u$  在  $(x^*, t^*)$  上取到正的极大值,则由极值原理知  $(x^*, t^*) \in \{x=0\}$  或  $(x^*, t^*) \in \{x=l\}$  或  $(x^*, t^*) \in \{t=0\}$ 。当  $(x^*, t^*) \in \{x=0\}$  或  $(x^*, t^*) \in \{t=0\}$ , 有

$$u(x^*, t^*) \leq \max\left(\max_{0 \leq t \leq T} \mu_1(t), \max_{0 \leq x \leq l} \varphi_1(x)\right). \quad (4.5)$$



## §4 极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

## 2. 初边值问题解的唯一性和稳定性

当  $(x^*, t^*) \in \{x = l\}$  时,  $u(x^*, t^*) = u(l, t^*) > 0$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t^*) = \lim_{x \rightarrow l} \frac{u(x, t^*) - u(l, t^*)}{x - l} \leq 0,$$

于是

$$hu \leq \mu_2(t), \quad (4.6)$$

从而有

$$u(x^*, t^*) \leq \max_{0 \leq t \leq T} \frac{1}{h} \mu_2(t). \quad (4.7)$$

因考虑的是  $u$  取正的极大值, 还需与零比较大小, 即有

$$u(x, t) \leq \max(0, \max_{0 \leq x \leq l} \varphi_1(x), \max_{0 \leq t \leq T} \mu_1(t), \frac{1}{h} \max_{0 \leq t \leq T} \mu_2(t)). \quad (4.8)$$

同理, 再考虑  $u$  取负的极小值的可能性后可得

$$u(x, t) \geq \min(0, \min_{0 \leq x \leq l} \varphi_1(x), \min_{0 \leq t \leq T} \mu_1(t), \frac{1}{h} \min_{0 \leq t \leq T} \mu_2(t)). \quad (4.9)$$

若  $|\varphi| \leq \varepsilon, |\mu_1(t)| \leq \varepsilon, |\mu_2(t)| \leq \varepsilon$ , 由上可导出  $|u(x, t)| \leq (1 + \frac{1}{h})\varepsilon$ , 从而稳定性成立。



## §4 极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

## 2. 初边值问题解的唯一性和稳定性

综上所述, 有

## 定理 4.3

对任意给定的  $T > 0$ , 热传导方程的初边值问题在  $R_T$  上的解是唯一的, 且连续地依赖于初值  $\varphi(x)$  以及边界条件中的  $\mu_1(t), \mu_2(t)$ 。

上面的证明过程用到了  $h > 0$  的条件, 因此不能直接将上面的推导应用于取第二类边界条件的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \\ u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = \mu_2(t), \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \quad (4.10)$$

的唯一性与稳定性的讨论。为此, 作未知函数的线性可逆变换

$$\tilde{u} = w(x)u, \quad (\implies u = \frac{\tilde{u}}{w(x)}) \quad (4.11)$$

将边界化为第三边界条件的形式。事实上,  $w(x)$  的选区与边界区间长有关, 并能将第二边界化为第三边界条件, 可能不是唯一的。今取  $w = l - x + 1$ , 则  $1 \leq w(x) \leq l + 1$  ( $0 \leq x \leq l$ )。又由函数求导法则知

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{w} \tilde{u}_t, \quad u_x = \frac{1}{w} \tilde{u}_x + \frac{1}{w^2} \tilde{u}, \\ u_{xx} &= \frac{1}{w} \tilde{u}_{xx} + \frac{2}{w^2} \tilde{u}_x + \frac{2}{w^3} \tilde{u}. \end{aligned}$$



## §4 极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

## 2. 初边值问题解的唯一性和稳定性

于是  $\tilde{u}$  满足

$$\tilde{u}_t - a^2 \tilde{u}_{xx} - \frac{2a^2}{l-x+1} \tilde{u}_x - \frac{2a^2}{(l-x+1)^2} \tilde{u} = 0, \quad (4.12)$$

$$\tilde{u}|_{t=0} = w(x)\varphi(x), \quad (4.13)$$

$$\tilde{u}_{x=0} = (l+1)\mu_1(t), \quad (\tilde{u}_x + \tilde{u})|_{x=l} = \mu_2(t). \quad (4.14)$$

再作可逆变换

$$v = e^{-\lambda t} \tilde{u} \quad (\implies \tilde{u} = e^{\lambda t} v) \quad (4.15)$$

并取  $\lambda > 2a^2 (\geq \frac{2a^2}{(l-x+1)^2})$ 。于是所考察的初边值问题就化为

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} - \frac{2a^2}{l-x+1} v_x + (\lambda - \frac{2a^2}{(l-x+1)^2}) v = 0, \\ v|_{x=0} = e^{-\lambda t} (l+1)\mu_1(t), \quad (v_x + v)|_{x=l} = e^{-\lambda t} \mu_2(t), \\ v|_{t=0} = w(x)\varphi(x). \end{cases} \quad (4.16)$$



## §4 极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

## 2. 初边值问题解的唯一性和稳定性

若  $v$  在  $(x^*, t^*)$  取到正的极大值, 即  $v(x^*, t^*) > 0$ 。那么  $(x^*, t^*)$  不可能在区域内部达到, 否则, 由  $v_t \geq 0, v_x = 0, v_{xx} \leq 0, v > 0$  及  $\lambda - \frac{2a^2}{(t-x+1)^2} > 0$  可知(4.16)中的方程不成立。分别考虑  $(x^*, t^*)$  在  $t = 0, x = 0$  与  $x = l$  上, 类似可得

$$v(x, t) \leq \max(0, \max_{0 \leq x \leq l} w(x)\varphi(x), \max_{0 \leq t \leq T} (l+1)\mu_1(t)e^{-\lambda t}, \max_{0 \leq t \leq T} \mu_2(t)e^{-\lambda t}), \quad (4.17)$$

$$v(x, t) \geq \min(0, \min_{0 \leq x \leq l} w(x)\varphi(x), \min_{0 \leq t \leq T} (l+1)\mu_1(t)e^{-\lambda t}, \min_{0 \leq t \leq T} \mu_2(t)e^{-\lambda t}). \quad (4.18)$$

最后利用可逆变换(4.11)与(4.15)可得问题(4.10)解的估计。

## 定理 4.4

对任意给定的  $T > 0$ , 热传导方程的初边值问题(4.10)在  $R_T$  上的解是唯一的, 而且连续地依赖于初值  $\varphi(x)$  及边界函数  $\mu_1(t), \mu_2(t)$ 。



## §4 极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

## 3. 柯西问题解的唯一性和稳定性

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + f(x, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < \infty). \end{cases} \quad (4.19)$$

求解无界直线问题, 一般要求温度的分布有界, 即  $\exists B > 0$ , 使得对任意的  $t \geq 0, -\infty < x < \infty$ , 有  $|u(x, t)| \leq B$ .

## 定理 4.5

柯西问题(4.19)在有界函数类中的解是唯一的, 而且连续地依赖于所给的初始条件  $\varphi(x)$ 。

**证 唯一性:** 设  $u_1, u_2$  是柯西问题(4.19)的两解, 令  $u = u_1 - u_2$ , 则  $u$  满足

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0, \\ u(x, 0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty). \end{cases}$$

由于区域无界, 即使  $u$  有界, 它也可能在任何地方都达不到它的最大值与最小值, 因此不能直接用极值原理, 为此, 对上半平面的任一点  $(x_0, t_0), t_0 > 0$ , 考虑矩形区域

$$R_0: 0 \leq t \leq t_0, |x - x_0| \leq L,$$

其中  $L$  是一个任意给定的正数。作辅助函数

$$v(x, t) = \frac{4B}{L^2} \left( \frac{(x - x_0 - 0)^2}{2} + a^2 t \right).$$



## §4 极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

## 3. 柯西问题解的唯一性和稳定性

不难验证  $v$  在区域  $R_0$  上连续, 在  $R_0$  内部满足方程(4.1), 且

$$v(x, 0) = \frac{2B(x - x_0)^2}{L^2} \geq 0 = u(x, 0),$$

$$v(x_0 \pm L, t) \geq 2B \geq u(x_0 \pm L, t).$$

于是在  $R_0$  的下底及侧边上成立着不等式

$$v(x, t) \geq u(x, t).$$

利用极值原理知, 在区域  $R_0$  上也成立着

$$v(x, t) \geq u(x, t),$$

即

$$\frac{4B}{L^2} \left( \frac{(x - x_0)^2}{2} + a^2 t \right) \geq u(x, t).$$

同理可证, 在区域  $R_0$  上也成立着

$$u(x, t) \geq -\frac{4B}{L^2} \left( \frac{(x - x_0)^2}{2} + a^2 t \right)$$



## §4 极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

## 3. 柯西问题解的唯一性和稳定性

特别取  $(x_0, t_0)$  点, 就得到

$$|u(x_0, t_0)| \leq \frac{4B}{L^2} a^2 t_0.$$

由  $L$  的任意性, 令  $L \rightarrow \infty$ , 就得到

$$u(x_0, t_0) = 0.$$

又  $(x_0, t_0)$  是上半平面的任一点, 故在整个区域中  $u(x, t) \equiv 0$ . 唯一性得证。

稳定性: 当  $|\varphi(x)| \leq \eta$  时, 将上面的辅助函数改为

$$v(x, t) = \frac{4B}{L^2} \left( \frac{(x - x_0 - 0)^2}{2} + a^2 t \right) + \eta.$$

类似可得

$$|u(x_0, t_0)| \leq \frac{4B}{L^2} a^2 t_0 + \eta.$$

再令  $L \rightarrow \infty$ , 就得到

$$|u(x_0, t_0)| \leq \eta.$$

又由  $(x_0, t_0)$  任意性, 故得在整个区域中  $|u(x, t)| \leq \eta$ , 即稳定性成立。



## §5 解的渐近性态

## 1. 初边值问题解的渐近性态

先讨论热传导方程初边值问题(2.1)-(2.4)解的渐近性态。在第 2 节已证, 当初始函数  $\varphi(x)$  满足  $\varphi(x) \in C^1$ ,  $\varphi(0) = 0, \varphi'(l) + h\varphi(l) = 0$  时, 我们用分离变量法得到了一个用级数表示得经典解

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-a^2 \lambda_k t} \sin \sqrt{\lambda_k} x, \quad (5.1)$$

其中

$$A_k = \frac{1}{M_k} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \sqrt{\lambda_k} \xi d\xi, \quad (5.2)$$

$$M_k = \frac{l}{2} + \frac{h}{2(h^2 + \lambda_k)} \left( \geq \frac{l}{2} \right), \quad (5.3)$$

而  $\lambda_k$  为超越方程

$$\tan(\sqrt{\lambda} l) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h} \quad (5.4)$$

的解, 它满足  $\frac{(k-\frac{1}{2})^2 \pi^2}{l^2} < \lambda_k < \frac{k^2 \pi^2}{l^2}$ 。



## §5 解的渐近性态

## 1. 初边值问题解的渐近性态

## 定理 5.1

设初始函数  $\varphi(x)$  满足  $\varphi(x) \in C^1$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(l) + h\varphi(l) = 0$ . 则当  $t \rightarrow \infty$  时, 问题(2.1)-(2.4)的唯一经典解指数衰减地趋于零,

$$|u(x, t)| \leq C e^{-a^2 \lambda_1 t} \rightarrow 0, \quad (5.5)$$

其中  $C$  为一个与解无关的正常数.

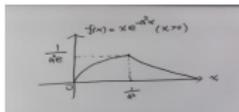
证 由(5.2)和(5.3)知, 对一切的  $k$ , 有

$$|A_k| \leq \frac{1}{M_k} \int_0^l |\varphi(x)| dx \leq \frac{2}{l} \cdot \max_{[0, l]} |\varphi(x)| \cdot l = 2 \max_{[0, l]} |\varphi(x)| \triangleq C_1. \quad (5.6)$$

又因为  $k \rightarrow \infty$  时,  $\lambda_k = O(k^2)$ , 因此  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k - \lambda_1} < +\infty$ . 另一方面, 当  $t \geq 1$  时, 对所有的  $k \geq 2$  成立

$$(\lambda_k - \lambda_1) e^{-a^2(\lambda_k - \lambda_1)t} \leq (\lambda_k - \lambda_1) e^{-a^2(\lambda_k - \lambda_1)} \leq \frac{1}{a^2} \triangleq C_2, \quad (5.7)$$

(事实上, 若设  $f(x) = x e^{-a^2 x}$  ( $x > 0$ ), 则  $f'(x) = (1 - a^2 x) e^{-a^2 x}$ . 令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = \frac{1}{a^2}$ , 即函数  $f(x)$  在点得  $x = \frac{1}{a^2}$  取得最大值, 如图



## §5 解的渐近性态

## 1. 初边值问题解的渐近性态

因此对任意的  $x > 0$ ,  $f(x) \leq f(\frac{1}{a^2}) = \frac{1}{a^2} e^{a^2 \cdot \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a^2 e}$  于是, 当  $t \geq 1$  时, 对所有的  $x \in [0, l]$  成立

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq C_1 \left( 1 + \sum_{k=2}^{\infty} e^{-a^2(\lambda_k - \lambda_1)t} \right) e^{-a^2\lambda_1 t} \\ &\leq C_1 \left( 1 + \sum_{k=2}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_1) e^{-a^2(\lambda_k - \lambda_1)t} \frac{1}{\lambda_k - \lambda_1} \right) e^{-a^2\lambda_1 t} \\ &\leq C_1 \left( 1 + C_2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k - \lambda_1} \right) e^{-a^2\lambda_1 t} \leq C e^{-a^2\lambda_1 t}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

定理证毕。 □

注: 波动方程的初边值问题不具有衰减性质。



## §5 解的渐近性态

## 2. 柯西问题解的渐近性态

下面讨论热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (5.9)$$

解的渐近性态。同样，前面已讨论，当  $\varphi(x)$  为连续有界函数，问题(5.9)-(5.10)的唯一解可由泊松积分给出：

$$u(x, t) = \frac{1}{2a^2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi. \quad (5.11)$$

还需假设  $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ ，即积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| dx$  收敛，并记

$$\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| dx. \quad (5.12)$$

## 定理 5.2

设  $\varphi(x)$  为连续有界函数且  $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ ，则柯西问题(5.9)-(5.10)的唯一经典解有如下的渐近性态：对一切  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ ，当  $t \rightarrow +\infty$  时，一致地成立

$$|u(x, t)| \leq Ct^{-\frac{1}{2}} \rightarrow 0, \quad (5.13)$$

其中  $C$  为一个仅与  $a$  和  $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})}$  有关的正常数。

## §5 解的渐近性态

## 2. 柯西问题解的渐近性态

证 由(5.11)式知

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{2a^2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\xi)| d\xi = \frac{1}{2a^2\sqrt{\pi}} \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}} \triangleq C t^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.14)$$

定理证毕。 □

注：对  $n \geq 1$  维热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

的解的表达式为

$$u(x, t) = \frac{1}{(2a^2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

从而

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{(2a^2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)| d\xi \leq C t^{-\frac{n}{2}} (\rightarrow 0, t \rightarrow \infty).$$

注：对波动方程的柯西问题的解，一维时没有衰减性，二维、三维有衰减性。



- ① 第一章 波动方程
  - 建立方程、定解条件
- ② 第二章 热传导方程
  - 格林公式及其应用
  - 格林函数
- ③ 第三章 调和方程
  - 强极值原理、第二边值问题解的唯一性
- ④ 第四章 二阶线性偏微分方程的分类与总结



## §1 建立方程、定解条件

## 1. 方程的导出

调和方程 (拉普拉斯方程)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (1.1)$$

泊松方程

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z). \quad (1.2)$$

二维情况, 调和方程和泊松方程的形式为

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.1')$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y). \quad (1.2')$$

例 1 膜平衡状态下的膜振动方程

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F(x, y, t)$$

就化为膜平衡方程

$$0 = T \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F(x, y, t) \implies \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{F(x, y)}{T},$$

它就是二维的泊松方程。



## §1 建立方程、定解条件

## 1. 方程的导出

例 2 稳定状态下的热传导方程

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x, y, t).$$

若  $f(x, y, t) = f(x, y)$ , 则  $u(x, y, t) = u(x, y)$ , 于是上述热传导方程就变成了泊松方程。

例 3 复变函数论中, 解析函数

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \iff \Delta u = 0, \Delta v = 0.$$

(1) 引力位势 由牛顿万有引力定律, 位于  $(x_0, y_0, z_0)$  处质量为  $M$  的质点对位于  $(x, y, z)$  处具有单位质量的质点的引力, 其大小等于  $M/r^2$ , 其中  $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$  为这两点之间的距离。写成向量的形式, 即为

$$\vec{F}(x, y, z) = -\frac{M}{r^2} \left( \frac{x-x_0}{r}, \frac{y-y_0}{r}, \frac{z-z_0}{r} \right).$$

$\vec{F}(x, y, z)$  称为引力场函数。引力场函数是位势函数

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{M}{r}$$

的梯度:  $\vec{F} = -\text{grad}\varphi$ 。事实上, 因为  $\nabla r = (r_x, r_y, r_z) = \left( \frac{x-x_0}{r}, \frac{y-y_0}{r}, \frac{z-z_0}{r} \right)$ , 所以

$\nabla\varphi = \varphi'(r)\nabla r = \frac{M}{r^2}\nabla r = \frac{M}{r^2} \left( \frac{x-x_0}{r}, \frac{y-y_0}{r}, \frac{z-z_0}{r} \right)$ , 即  $\vec{F} = -\text{grad}\varphi$ 。除了允许相差一个任意常数外, 位势函数是

唯一确定的。



## §1 建立方程、定解条件

## 1. 方程的导出

若以密度  $\rho(x, y, z)$  表示分布在区域  $\Omega$  上的质量, 在  $\Omega$  中任取体积微元  $dV$ , 则  $dV$  对  $M(x, y, z)$  的引力位势为  $\frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r}$ , 其中  $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$ . 从而在区域  $\Omega$  上的质量所产生的总引力位势应为

$$\varphi(x, y, z) = - \iiint_{\Omega} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} = - \iiint_{\Omega} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{1}{r} d\xi d\eta d\zeta. \quad (1.3)$$

通过计算可以验证,  $\varphi(x, y, z)$  在  $\Omega$  以外满足调和方程

$$\Delta\varphi = 0.$$

进一步可验证, 若  $\rho(x, y, z)$  满足 Hölder 条件 (若函数  $f(M)$  在其定义域中满足  $|f(M_1) - f(M_2)| \leq C\overline{M_1M_2}^r$ , 其中  $0 < r < 1$ ,  $C$  是一个正常数, 则称  $f$  满足 Hölder 条件), 则  $\varphi(x, y, z)$  在  $\Omega$  以内满足泊松方程

$$\Delta\varphi = 4\pi\rho.$$

即

$$\Delta\varphi = -\Delta \iiint_{\Omega} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{1}{r} d\xi d\eta d\zeta = \begin{cases} 0 & M_0 \notin \Omega, \\ 4\pi\rho & M_0 \in \Omega. \end{cases}$$



## §1 建立方程、定解条件

## 1. 方程的导出

(2) **静电场的电位势** 设空间中有以电荷密度为  $\rho(x, y, z)$  的静电场。在此静电场内任取一闭曲面  $\Sigma$  包围的区域  $G$ , 由高斯定律知, 通过  $\Sigma$  向外的电通量等于  $G$  中的总电量的  $4\pi$  倍, 即

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds = 4\pi \iiint_G \rho dx dy dz,$$

在利用格林公式和  $G$  的任意性可得

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (1.4)$$

又由库仑定律知, 静电场是有势的, 即存在静电位势  $u = u(x, y, z)$ , 使  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} u$ , 将其代入(1.4), 即得静电位势  $u$  满足泊松方程

$$\Delta u = -4\pi\rho.$$

特别地, 若在某区域内没有电荷存在, 则此区域中的静电位势  $u$  满足调和方程, 即  $\Delta u = 0$ 。

**定义** 调和方程 (1.1) 的经典解, 也就是说具有关于  $x, y$  和  $z$  的二阶连续偏导数并且满足方程 (1.1) 的连续函数解 (或具有关于变量  $x$  和  $y$  的二阶连续偏导数并且满足方程 (1.1') 的连续函数解) 称为调和函数。



## §1 建立方程、定解条件

## 2. 定解条件和定解问题

(1) 第一边值问题 (狄利克雷 (Dirichlet) 问题) 在空间  $(x, y, z)$  中的某一区域  $\Omega$  的边界  $\Gamma$  上给定了一个连续函数  $g$ , 要求找出这样的一个函数  $u(x, y, z)$ , 它在  $\Omega$  内是调和函数, 在  $\Omega \cup \Gamma$  上连续, 并在  $\Gamma$  上与已给的函数  $g$  重合:

$$u|_{\Gamma} = g. \quad (1.5)$$

即问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \Omega, \\ u|_{\Gamma} = g, & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

(2) 第二边值问题 (诺伊曼 (Neumann) 问题) 在某光滑的闭曲面  $\Gamma$  上给出连续函数  $g$ , 要寻找这样的一个函数  $u(x, y, z)$ , 它在  $\Gamma$  的内部区域  $\Omega$  中是调和函数, 在  $\Omega \cup \Gamma$  上连续, 且在  $\Gamma$  上的任一点沿  $\Gamma$  的单位外法线方向  $\mathbf{n}$  的方向导数  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  存在, 并且等于已给函数  $g$  在该点的值:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = g. \quad (1.6)$$

即问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = g, & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$



## §1 建立方程、定解条件

## 2. 定解条件和定解问题

求一个函数  $u$  在曲面  $\Gamma$  外部为调和函数, 而在曲面  $\Gamma$  上满足所给的边界条件, 这样的问题被称为拉普拉斯方程的外问题。拉普拉斯方程的外问题是在无穷区域给的, 定解问题的解在无穷远处还应加一定的限制。例如, 考察以原点为心、单位球面  $\Gamma$  为边界曲面的狄利克雷外问题, 并给边界条件  $u|_{\Gamma} = 1$ , 则  $u_1(x, y, z) = 1$  及  $u_2(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  都是狄利克雷外问题的解。因此如果在无穷远处不加限制, 则不能保证解的唯一性。在三维情况下, 通常要求解在无穷远处的极限为零, 即

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(x, y, z) = 0 \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}). \quad (1.7)$$

(3) 狄利克雷外问题 在空间  $(x, y, z)$  中的某一闭曲面  $\Gamma$  上给定连续函数  $g$ , 要找出这样一个函数  $u(x, y, z)$ , 它在  $\Gamma$  的外部区域  $\Omega'$  内调和 (无穷远处除外), 在  $\Omega' \cup \Gamma$  上连续, 当点  $(x, y, z)$  趋于无穷远时,  $u(x, y, z)$  一致地趋于零 (即满足条件(1.7)), 且在  $\Gamma$  上取所给的函数值:

$$u|_{\Gamma} = g. \quad (1.8)$$

即问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \Omega', \\ u|_{\Gamma} = g, & \text{on } \Gamma, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} u = 0. \end{cases}$$



## §1 建立方程、定解条件

## 2. 定解条件和定解问题

(4) **诺伊曼外问题** 在某光滑的闭曲面  $\Gamma$  上给出连续函数  $g$ , 要求找出这样的函数  $u(x, y, z)$ , 它在闭曲面  $\Gamma$  的外部区域  $\Omega'$  内调和, 在  $\Omega' \cup \Gamma$  上连续, 在无穷远处满足条件(1.7), 且在  $\Gamma$  上任一点沿区域  $\Omega'$  的单位外法线方向  $\mathbf{n}'$  (指向曲面  $\Gamma$  的内部) 的法向导数  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}'}$  存在, 并且满足

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}'} \right|_{\Gamma} = g. \quad (1.9)$$

即问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \Omega', \\ \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}'} \right|_{\Gamma} = g, & \text{on } \Gamma, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} u = 0. \end{cases}$$



## §1 建立方程、定解条件

## 3. 变分原理

在物理和力学中有几个关于能量极大或极小的定律，它们与描述质量、动量、力、热量、电量等物理量为守恒或平衡的其他物理定律具有同样的重要性，这说明泊松方程有确切的物理背景。用积分表达式的极值问题称为变分问题。力学中有如下的最小总位能原理：在一切可能的位移中，真实位移使总位能达到最小。考察薄膜的平衡问题。设有一边界固定的薄膜，在外力作用下处于平衡状态。记号与第一章相同，在外力  $F$  作用下薄膜的总位能为

$$V = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{T}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - Fu \right\} dx dy.$$

以  $J(u)$  表示总位能，不计一个常数因子，它可写为

$$J(u) = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - fu \right\} dx dy, \quad (1.10)$$

其中  $f = \frac{F}{T}$ 。

给定函数集合  $V_0$  为

$$V_0 = \{v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), v|_r = 0\}, \quad (1.11)$$

则一切可能的位移可取为集合  $V_0$  中的元素的全体。于是，最小总位能原理可描述为：若  $u$  为真实位移，则  $u \in V_0$ ，且满足

$$J(u) = \min_{v \in V_0} J(v). \quad (1.12)$$



## §1 建立方程、定解条件

## 3. 变分原理

对变分问题(1.12)与下述泊松方程的狄利克雷问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \\ u|_r = 0, \end{cases} \quad (1.13)$$

有如下定理

## 定理 1.1

**(变分原理)** 如果满足(1.12)的函数  $u \in V_0$  存在, 它必满足(1.13)。反之, 若  $u$  是定解问题(1.13)属于  $V_0$  的解, 则  $u$  必为变分问题(1.12)的解。

**证** 若  $u$  为变分问题(1.12)的解, 任取  $w \in V_0$ , 令  $v = u + \lambda w, \lambda \in \mathbb{R}$ 。显然有  $v \in V_0$ , 且

$$\begin{aligned} J(v) &= J(u + \lambda w) = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x}(u + \lambda w) \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y}(u + \lambda w) \right)^2 \right] - f \cdot (u + \lambda w) \right\} dx dy \\ &= J(u) + \lambda \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - fw \right) dx dy + \frac{\lambda^2}{2} \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \end{aligned}$$

由(1.12)知,  $J(u + \lambda w)$  在  $\lambda = 0$  取到极小值, 应有

$$\frac{d}{d\lambda} J(u + \lambda w) \Big|_{\lambda=0} = 0,$$



## §1 建立方程、定解条件

## 3. 变分原理

即

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - fw \right) dx dy = 0. \quad (1.14)$$

由格林公式知

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( w \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( w \frac{\partial u}{\partial y} \right) - w \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] dx dy \\ &= \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds - \iint_{\Omega} \Delta u \cdot w dx dy \\ &= - \iint_{\Omega} \Delta u \cdot w dx dy. \end{aligned}$$

再结合(1.14)式得到, 对任何给定的  $w \in V_0$ , 成立

$$\iint_{\Omega} (\Delta u + f) w dx dy = 0. \quad (1.15)$$

由此可知在  $\Omega$  中  $\Delta u + f \equiv 0$ 。反证, 若在  $(x_0, y_0)$ ,  $(\Delta u + f)(x_0, y_0) \neq 0$ , 不妨设  $(\Delta u + f)(x_0, y_0) > 0$ , 则

由  $\Delta u + f$  的连续性知, 必存在  $(x_0, y_0)$  的一个邻域  $B_r$  且在  $B_r$  中  $\Delta u + f > 0$ 。取  $w$  为在  $(x_0, y_0)$  点附近

大于零, 在其外等于零, 比如取



## §1 建立方程、定解条件

## 3. 变分原理

$$w(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x-x_0|^2+|y-y_0|^2-r^2}}, & |x-x_0|^2+|y-y_0|^2 < r^2, \\ 0, & |x-x_0|^2+|y-y_0|^2 \geq r^2. \end{cases}$$

就有

$$\iint_{\Omega} (\Delta u + f) w dx dy > 0,$$

与(1.15)矛盾, 因此, 在  $\Omega$  中必有  $\Delta u + f \equiv 0$ . 又  $u \in V_0$ , 因此  $u|_{\Gamma} = 0$ , 即  $u$  是问题(1.13)的解.

反之, 若  $u \in V_0$  是定解问题(1.13)的解, 则对任意的  $w \in V_0$ , 成立

$$-\iint_{\Omega} (\Delta u + f) w dx dy = 0.$$

再利用格林公式知

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - f w \right) dx dy = 0. \quad (1.16)$$



## §1 建立方程、定解条件

## 3. 变分原理

任取  $v \in V_0$ , 令  $w = u - v$ , 则  $w \in V_0$  且

$$\begin{aligned} J(v) &= J(u + w) \\ &= J(u) + \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - fw \right) dx dy \\ &\quad + \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \end{aligned}$$

再利用(1.16)式即得

$$J(v) = J(u) + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \geq J(u),$$

且等号仅当  $w = 0$  时成立。这就证明了  $u$  满足(1.12), 即  $u$  是变分问题(1.12)的解。

□



## §2 格林公式及其应用

## 1. 格林 (Green) 公式

设  $\Omega$  为有界区域 (可为多连通区域) 且其边界  $\Gamma$  足够光滑, 函数  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  属于  $C^\infty(\Omega) \cap C(\Omega \cup \Gamma)$ , 则有

$$\iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\Omega = \iint_{\Gamma} P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y) + R \cos(\mathbf{n}, z) dS,$$

其中  $d\Omega$  是体积微元,  $\mathbf{n}$  是  $\Gamma$  外法线方向,  $dS$  是  $\Gamma$  上的面积微元。

设函数  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma)$ 。在上式中令  $P = u \frac{\partial v}{\partial x}, Q = u \frac{\partial v}{\partial y}, R = u \frac{\partial v}{\partial z}$ , 就得到格林第一公式

$$\iiint_{\Omega} u \Delta v d\Omega = \iint_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} dS - \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\Omega, \quad (2.1)$$

其中  $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$  表示外法向导数。

在(2.1)中将函数  $u, v$  的位置交换, 得

$$\iiint_{\Omega} v \Delta u d\Omega = \iint_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS - \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \right) d\Omega. \quad (2.2)$$



## §2 格林公式及其应用

## 1. 格林 (Green) 公式

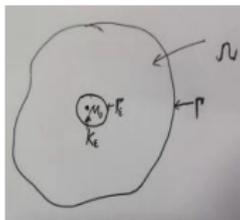
(2.1)减去(2.2), 就得到格林第二公式

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) d\Omega = \iint_{\Gamma} \left( u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS. \quad (2.3)$$

考察函数

$$v = \frac{1}{r_{M_0M}} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}, \quad (2.4)$$

此处  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  是  $\Omega$  内某一固定点。易知  $M \neq M_0, \Delta v = \Delta\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right) = 0$ , 称它为三维拉普拉斯方程的基本解。在(2.3)中取  $u$  是调和函数,  $v = \frac{1}{r_{M_0M}}$ 。由于  $v$  在区域  $\Omega$  内有奇异点  $M_0$ , 因此对此区域  $\Omega$  不能直接应用格林第二公式(2.3), 但, 如果在区域  $\Omega$  内挖去一个以  $M_0$  为心、充分小正数  $\varepsilon$  为半径的球  $K_\varepsilon$ , 其球面为  $\Gamma_\varepsilon$ , 则在剩下区域  $\Omega \setminus K_\varepsilon$  中函数  $v$  就连续可导了。



## §2 格林公式及其应用

## 1. 格林 (Green) 公式

于是在区域  $\Omega \setminus K_\varepsilon$  上对函数  $u, v$  应用(2.3), 得

$$0 \equiv \iiint_{\Omega \setminus K_\varepsilon} \left( u \Delta \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \Delta u \right) d\Omega = \iint_{\Gamma \cup \Gamma_\varepsilon} \left( u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS, \quad (2.5)$$

在球面  $\Gamma_\varepsilon$  上,  $r$  的方向与  $\mathbf{n}$  方向相反且  $(\frac{1}{r})_x = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x-x_0}{r}$ , 于是

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{r} \right) = \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} = \left( \left( \frac{1}{r} \right)_x, \left( \frac{1}{r} \right)_y, \left( \frac{1}{r} \right)_z \right) \cdot \vec{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\varepsilon^2},$$

因此

$$\iint_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{r} \right) dS = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\Gamma_\varepsilon} u dS = 4\pi u(M^*) = 4\pi u^*,$$

其中  $u(M^*) = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \iint_{\Gamma_\varepsilon} u dS, M^* \in \Gamma_\varepsilon$ 。类似地, 有

$$\iint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = \frac{1}{\varepsilon} \iint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = 4\pi\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(M_1^*) = 4\pi\varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)^*,$$

此处  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(M_1^*) = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \iint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS, M_1^* \in \Gamma_\varepsilon$ 。



## §2 格林公式及其应用

## 1. 格林 (Green) 公式

于是结合(2.5)可得

$$\iint_{\Gamma} \left( u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS + 4\pi u^* - 4\pi \varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)^* = 0.$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 则  $M^* \rightarrow M$ ,  $M_1^* \rightarrow M$ , 再利用  $u$  和  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  的连续性,  $u(M^*) \rightarrow u(M)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(M_1^*) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(M)$ , 最终得到调和函数的基本积分公式

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \left( u(M) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{r_{M_0 M}} \right) - \frac{1}{r_{M_0 M}} \frac{\partial u(M)}{\partial \mathbf{n}} \right) dS_M. \quad (2.6)$$

注: 上述没有将  $\Gamma$  上的积分算出来, 是因为  $\Gamma$  不一定是规则的, 因此外法线方向不好计算。

(2.6)表明对在  $\Omega \cup \Gamma$  上有连续一阶偏导数的调和函数, 其在区域  $\Omega$  内任一点  $M_0$  的值, 可通过函数本身以及其法向导数在边界  $\Gamma$  上的积分表示出来。

如果  $M_0 \in \Omega^c$ , 此时  $M \neq M_0$ ,  $\frac{1}{r_{M_0 M}}$  是调和函数, 因此(2.6)的右端为零。如果  $M_0 \in \Gamma$ , 因为区域  $\Omega$  的边界  $\Gamma$  足够光滑, 因此在  $M_0$  附近挖掉的部分可以同胚一个半球, 因此计算的值就是(2.6)右端的  $\frac{1}{2}$ , 合起来可写为



## §2 格林公式及其应用

## 1. 格林 (Green) 公式

$$-\iint_{\Gamma} \left( u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS = \begin{cases} 0 & (\text{若 } M_0 \text{ 在 } \Omega \text{ 外}), \\ 2\pi u(M_0) & (\text{若 } M_0 \text{ 在 } \Gamma \text{ 上}), \\ 4\pi u(M_0) & (\text{若 } M_0 \text{ 在 } \Omega \text{ 内}). \end{cases} \quad (2.7)$$

同样, 对泊松方程, 若  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma)$  且  $\Delta u = F$ , 就可得到与(2.6)类似地公式

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \left( u(M) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{r_{M_0 M}} \right) - \frac{1}{r_{M_0 M}} \frac{\partial u(M)}{\partial \mathbf{n}} \right) dS_M - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{F(M)}{r_{M_0 M}} d\Omega_M. \quad (2.8)$$

## 定理 2.1

设函数  $u$  在以  $\Gamma$  为边界的区域  $\Omega$  内调和, 在  $\Omega \cup \Gamma$  上有连续一阶偏导数, 则

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = 0. \quad (2.9)$$

证 在公式(2.3)中取  $u$  是所给的调和函数, 取  $v \equiv 1$ , 就得到(2.9)。

## §2 格林公式及其应用

## 1. 格林 (Green) 公式

推论 1 诺伊曼内问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma} = f. \end{cases}$$

有解的必要条件是函数  $f$  满足  $\iint_{\Gamma} f dS = 0$ .

推论 2 泊松方程  $\Delta u = F$  的一个特解为

$$v(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{F(M)}{r_{M_0 M}} d\Omega_M. \quad (2.10)$$

若  $n = 2$  时, 拉普拉斯方程的基本解为

$$\ln \frac{1}{r_{M_0 M}} = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}, \quad (2.11)$$

相应于(2.6)的二维调和函数的基本积分公式为

$$u(M_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[ u(M) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \ln \frac{1}{r_{M_0 M}} \right) - \ln \frac{1}{r_{M_0 M}} \frac{\partial u(M)}{\partial \mathbf{n}} \right] dS_M. \quad (2.12)$$



## §2 格林公式及其应用

## 2. 平均值定理

## 定理 2.2

(平均值公式) 设函数  $u$  在某区域  $\Omega$  内调和,  $M_0$  是  $\Omega$  中的任一点. 则对以  $M_0$  为心、 $a$  为半径完全落在区域  $\Omega$  内部的球面  $\Gamma_a$  成立

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Gamma_a} u dS. \quad (2.13)$$

证 把公式(2.6)应用到球面  $\Gamma_a$  上, 得到

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma_a} \left[ u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right] dS.$$

在  $\Gamma_a$  上  $\frac{1}{r} = \frac{1}{a}$ , 于是由定理 2.1 得

$$\iint_{\Gamma_a} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS;$$

另一方面, 在球面  $\Gamma_a$  上的外法线方向与矢径方向一致, 从而  $\left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{r} \right) \right|_{\Gamma_a} = -\frac{1}{a^2}$ . 于是

$$\iint_{\Gamma_a} u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{r} \right) dS = -\frac{1}{a^2} \iint_{\Gamma_a} u dS \implies u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Gamma_a} u dS.$$

定理证毕。



## §2 格林公式及其应用

## 2. 平均值定理

注：在证明此定理时，我们利用了等式(2.6)，它是在假设函数  $u$  在球面上的导数  $\frac{\partial u}{\partial n}$  存在而推出的。如果只知道函数  $u(M)$  在闭区域  $\Omega \cup \Gamma$  上连续，在  $\Omega$  内满足方程  $\Delta u = 0$ ，那么根据上面的推理尚不能断言对一个和  $\Gamma$  相切的球面  $\Gamma_a$  也成立(2.13)式，但因为公式(2.13)对任意的一个  $a' < a$  的球  $\Gamma_{a'}$  总是正确的，然后取极限  $a' \rightarrow a$ ，即得关于  $\Gamma_a$  的公式(2.13)。

注：调和函数  $u$  在球心  $M_0$  的值也可以等于其在整个球上的积分平均值，即  $u(M_0) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi a^3} \iiint_{K_a} u dV$ 。证由定理 2.2 知，对  $0 \leq r \leq a$  都成立

$$4\pi r^2 u(M_0) = \iint_{\Gamma_r} u dS,$$

两端关于  $r$  从 0 到  $a$  积分得

$$4\pi u(M_0) \cdot \frac{1}{3} a^3 = \int_0^a 4\pi r^2 u(M_0) dr = \int_0^a \iint_{\Gamma_r} u dS dr = \iiint_{K_a} u(M) dV.$$

从而得到  $u(M_0) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi a^3} \iiint_{K_a} u dV$ 。



## §2 格林公式及其应用

## 3. 极值原理

## 定理 2.3

(极值原理) 对不恒等于常数的调和函数  $u(x, y, z)$ , 其在区域  $\Omega$  的任何内点上的值不可能达到它在  $\Omega$  上的上界或下界。

证 反证法, 设调和函数  $u(x, y, z)$  不恒为常数, 但在区域中的上界为  $m$  (这里假设有上界, 相反情况下, 定理自然成立)。设在  $\Omega$  内达到上界的点为  $M_0$ , 下证矛盾。

以  $M_0$  为心、任意半径  $R$  作一球  $K \subset \Omega$ , 且球面为  $S_R$ 。断言: 在  $S_R$  上  $u \equiv m$ 。事实上, 若  $u$  在  $S_R$  上某一点其值小于  $m$ , 则由  $u \in C$  知, 存在  $S_R$  上一邻域  $U_0 \subset S_R$  使  $|U_0| > 0$  且  $u(M) < m, \forall M \in U_0$ , 这里  $|U_0|$  表示  $U_0$  的测度。于是

$$\frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} u dS = \frac{1}{4\pi R^2} \left[ \iint_{U_0} u dS + \iint_{S_R \setminus U_0} u dS \right] < \frac{1}{4\pi R^2} m \cdot A(U_0) + \frac{1}{4\pi R^2} m \cdot A(S_R \setminus U_0) = m,$$

但由平均值公式(2.13)知

$$\frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} u dS = u(M_0) = m,$$

矛盾。因此在球面  $S_R$  上  $u \equiv m$ 。同理, 在以  $M_0$  为心、任意  $r (r \leq R)$  为半径的球面上,  $u \equiv m$ , 因此在整个球  $K$  上  $u \equiv m$ 。



## §2 格林公式及其应用

## 3. 极值原理

现证对  $\Omega$  中的所有点  $u \equiv m$ 。任取一点  $M_1 \in \Omega$ ，在区域  $\Omega$  中作连接  $M_0$  和  $M_1$  两点的折线  $\gamma$ 。因  $\gamma$  为有限长度，故可用完全落在  $\Omega$  中的有限个球  $K_1, K_2, \dots, K_n$  盖住  $\gamma$ ，并使  $K_1$  的球心为  $M_0$ ， $K_2$  的球心落在  $K_1$  中， $K_3$  的球心落在  $K_2$  中， $\dots$ ， $K_n$  的球心落在  $K_{n-1}$  中（图 3.1）。由上面证明方法，可依次证明在所有这些球所包围的区域上  $u \equiv m$ ，特别有  $u(M_1) = m$ 。再由  $M_1$  的任意性知，在整个区域上  $u(x, y, z) \equiv m$ ，这与  $u$  不恒等于常数矛盾。因此  $u$  不能在  $\Omega$  内部取到其上界。因为  $-u$  也是调和函数，从它在  $\Omega$  内部不能取到它的上界可知， $u$  在  $\Omega$  内部也不能取到其下界。定理证毕。 □

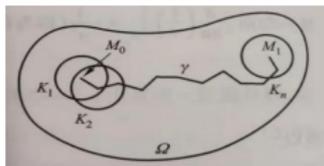


图 3.1

**推论 1** 在有限区域  $\Omega$  内调和、在  $\Omega \cup \Gamma$  上连续的函数必在边界  $\Gamma$  上取得最大值和最小值。

**推论 2 (比较原理)** 设  $u$  和  $v$  都是区域  $\Omega$  内的调和函数，且在  $\Omega \cup \Gamma$  上连续。如果在  $\Omega$  的边界  $\Gamma$  上成立着不等式  $u \leq v$ ，那么在  $\Omega$  内上述不等式也成立；并只在  $u = v$  时，在  $\Omega$  内才会有等号成立的可能。



## §2 格林公式及其应用

## 4. 第一边值问题解

## 定理 2.4

方程(1.1)的狄利克雷内问题(1.5)的解如果存在, 必是唯一的, 而且连续依赖于所给的边界条件  $f$ 。

**证 唯一性:** 假设  $u_1(x, y, z)$  和  $u_2(x, y, z)$  是方程(1.1)的狄利克雷内问题(1.5)的两个解, 且在边界  $\Gamma$  上取值相同, 都等于  $f$ 。令  $u = u_1 - u_2$ , 则  $u$  满足

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \Omega, \\ u|_{\Gamma} = 0, & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

于是按照定理 2.3 的推论 1 知, 函数  $u$  在  $\Omega$  上的最大最小值均为零, 从而  $u = 0$ 。因此, 狄利克雷内问题解是唯一的。

**稳定性:** 设  $u, u^*$  分别是方程(1.1)以  $f, f^*$  为边界的狄利克雷内问题的解, 即  $u|_{\Gamma} = f, u^*|_{\Gamma} = f^*$  且满足  $|f - f^*| \leq \varepsilon$ , 这里  $\varepsilon$  是给定的正数。由定理 2.3 的推论 1 知, 在  $\Omega$  上各点有

$$\max_{\Omega \cup \Gamma} (u - u^*) = \max_{\Gamma} (f - f^*) \leq \varepsilon, \quad \min_{\Omega \cup \Gamma} (u - u^*) = \min_{\Gamma} (f - f^*) \geq -\varepsilon.$$

因此, 在  $\Omega$  上各点有

$$|u - u^*| \leq \max_{\Gamma} |f - f^*| \leq \varepsilon,$$

即狄利克雷内问题的解连续地依赖于所给的边界条件。



## §2 格林公式及其应用

## 4. 第一边值问题解

## 定理 2.5

方程 (1.1) 的狄利克雷外问题的解如果存在, 必是唯一的, 而且也连续依赖于所给的边界条件。

**证 唯一性:** 设  $u_1, u_2$  是狄利克雷外问题的解, 令  $v = u_1 - u_2$ , 则  $v$  满足

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & \text{in } \Omega, \\ v|_{\Gamma} = 0, & \text{on } \Gamma, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} v(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。

如果  $v$  不恒等于零, 则必存在一点  $M$ , 使  $v(M) \neq 0$ , 不妨设  $v(M) > 0$ 。以  $\Gamma_R$  表示半径为  $R$  的球面, 当  $R$  取足够大时, 可使  $M$  点落在由  $\Gamma$  及  $\Gamma_R$  所围成的区域  $\Omega_R$  中, 且由条件  $\lim_{r \rightarrow \infty} v(x, y, z) = 0$  可得在  $\Gamma_R$  上有  $v|_{\Gamma_R} < v(M)$ 。因此, 调和函数  $v$  在  $\Omega_R$  的边界上都取不到其最大值, 这与极值原理矛盾, 因此  $v \equiv 0$ , 即狄利克雷外问题的解是唯一的。



## §2 格林公式及其应用

## 4. 第一边值问题解

稳定性: 设  $u, u^*$  是狄利克雷外问题相应于  $f, f^*$  的两个解, 令  $w = u - u^*$ , 则  $w$  满足

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & \text{in } \Omega, \\ w|_{\Gamma} = f - f^*, & \text{on } \Gamma, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} w = 0, \end{cases}$$

因为  $\lim_{r \rightarrow \infty} w = 0$ , 所以对任意小的  $\varepsilon > 0$ , 可取充分大的  $R > 0$ , 使以  $R$  为半径的球  $K_R$  (边界为  $\Gamma_R$ ) 完全包含  $\Gamma$

且  $w|_{\Gamma_R} < \varepsilon$ 。于是在  $K_R \setminus \Omega$  中对  $w$  应用极值原理可知

$$|v| < \max \left\{ \varepsilon, \max_{\Gamma} |f - f^*| \right\},$$

又因为  $\varepsilon$  是任意小的正数, 因此  $|v| < \max_{\Gamma} |f - f^*|$ , 即稳定性得证。定理证必。

□



## §3 格林函数

## 1. 格林函数及其性质

已证, 若  $u$  在区域  $\Omega$  中调和, 在  $\Omega \cup \Gamma$  上一阶连续, 则  $u$  满足(2.6), 即

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \left[ u(M) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{r_{M_0 M}} \right) - \frac{1}{r_{M_0 M}} \frac{\partial u(M)}{\partial \mathbf{n}} \right] dS_M,$$

其中  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ . 这个公式用  $u$  及其法向导数  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  在  $\Gamma$  上的值把  $u$  在区域  $\Omega$  内部的值表示出来, 这自然使我们想到能否用它来求解边值问题. 但由于同时需要  $u$  以及  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  在  $\Gamma$  上的值, 因此不能直接利用它来求解调和方程的狄利克雷问题(1.1)、(1.5)或诺伊曼问题(1.1)、(1.6).

比如说狄利克雷问题(1.1)、(1.5), 若  $u$  在  $\Gamma$  上的值给定, 按解的唯一性,  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  在  $\Gamma$  上的值就给出了, 不能再任意给了. 为了克服这个困难, 就需要引入格林函数来取消(2.6)中的  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ .

引入函数  $g(M, M_0)$ , 满足

$$\begin{cases} \Delta g = 0, & \text{in } \Omega, \\ g(M, M_0) \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{4\pi r_{M_0 M}} \Big|_{\Gamma}, & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (3.1)$$

由格林第二公式(2.3)知

$$\iint_{\Omega} (g \Delta u - u \Delta g) dx = \iint_{\Gamma} \left( g \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right) dS = 0.$$



## §3 格林函数

## 1. 格林函数及其性质

与(2.6)相减可得

$$u(M_0) = \iint_{\Gamma} \left( G \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} \right) dS_M = - \iint_{\Gamma} u \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dS_M, \quad (3.2)$$

其中函数

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{M_0 M}} - g(M, M_0) \quad (3.3)$$

称为方程(1.1)狄利克雷问题的格林函数(源函数)。那么方程(1.1)取边界条件

$$u|_{\Gamma} = f(M) \quad (1.5)$$

的狄利克雷问题形式解就可表示为

$$u(M_0) = - \iint_{\Gamma} f \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dS_M. \quad (3.4)$$

上述这种将边值问题的解用格林函数或者其导数的积分来表示的方法称为格林函数法。



## §3 格林函数

## 1. 格林函数及其性质

格林函数法的意义:

- (1) 格林函数仅依赖于区域, 与边界条件无关。
- (2) 对某些特殊区域, 如球、半空间等, 格林函数可以用初等方法求得, 而这些特殊区域上的狄利克雷问题常常起着重要作用。
- (3) (3.4) 不仅对问题的求解有意义, 在已知狄利克雷问题解的存在性以后, 还可以利用它对解的性质进行探讨。

格林函数的几个重要性质 (证明留做习题)。

**性质 1** 格林函数  $G(M, M_0)$  除  $M = M_0$  一点外处处满足方程(1.1), 而当  $M \rightarrow M_0$  时,  $G(M, M_0)$  趋于无穷大, 其阶数和  $\frac{1}{4\pi r_{M_0 M}}$  相同。(因在  $\Omega$  内  $g$  调和, 故有上下界, 即  $|g(M)| \leq C, M \in \Omega$ )

**性质 2** 在边界  $\Gamma$  上格林函数  $G(M, M_0)$  恒等于零。

**性质 3** 在区域  $\Omega$  中成立不等式  $0 < G(M, M_0) < \frac{1}{4\pi r_{M_0 M}}$ 。(因  $\Delta g = 0$  且  $g|_{\Gamma} = \frac{1}{4\pi r_{M_0 M}}|_{\Gamma} > 0$ , 故由极值原理知,  $g(M, M_0) > 0$ , 从而,  $G(M, M_0) < \frac{1}{4\pi r_{M_0 M}}$ )

**性质 4** 格林函数  $G(M, M_0)$  在自变量  $M$  及参变量  $M_0$  之间具有对称性, 即设  $M_1, M_2$  是区域中的两点, 则

$$G(M_1, M_2) = G(M_2, M_1).$$

**性质 5**  $\iint_{\Gamma} \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n} dS_M = -1.$



## §3 格林函数

## 1. 格林函数及其性质

**物理背景:** 格林函数在静电学中有物理意义。设在点  $M_0$  处置一单位点电荷, 那么它在自由空间所产生的静电场的电位为  $\frac{1}{4\pi r_{M_0 M}}$ 。如果在点  $M_0$  的点电荷包围在一个封闭的导电面内, 而这个导电面又是接地的, 此时在导电面内的电位就可以用格林函数

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{M_0 M}} - g(M, M_0)$$

来表示, 它在导电面上恒等于零。格林函数性质 4 在静电学上可表述为:  $M_1$  处的单位点电荷在  $M_2$  处产生的电位等于  $M_2$  处的单位点电荷在  $M_1$  处所产生的电位。类似于这样的原理在物理中称为 **互易原理**。



## §3 格林函数

## 2. 静电源像法

**静电源像法:** 设  $M_0$  是区域  $\Omega$  内一点, 它对自由空间的电场产生一个电位。假设在区域  $\Omega$  外也有一点电荷, 它对自由空间的电场也产生一个电位。如果这两个点电荷所产生的电位在边界面上恰好抵消, 这个假设的点电荷在  $\Omega$  内的电位就等于边界上感应电荷所产生的电位。容易想象, 这假象点电荷的位置应该是  $M_0$  关于边界曲面  $\Gamma$  的某种对称点。这种利用对称性求格林函数的方法称为**静电源像法 (镜像法)**。

现利用静电源像法求球的格林函数。设  $K$  是以  $O$  为球心、 $R$  为半径的球面。在点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  放置一单位电荷, 在射线  $OM_0$  上截线段  $OM_1$ , 使

$$\rho_0 \rho_1 = R^2, \left( \Rightarrow \frac{R}{\rho_0} = \frac{\rho_1}{R} = \frac{r_{M_1 P}}{r_{M_0 P}} \right) \quad (3.5)$$

其中  $\rho_0 = r_{OM_0}$ ,  $\rho_1 = r_{OM_1}$ , 称点  $M_1$  为  $M_0$  关于球面  $K$  的反演点。设  $P$  是球面  $K$  上任一点, 则三角形  $OPM_0$  与  $OPM_1$  相似, 于是有  $r_{M_1 P} = \frac{R}{\rho_0} r_{M_0 P}$ 。

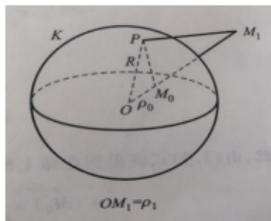


图 3.2

## §3 格林函数

## 2. 静电源像法

假想在点  $M_1$  处有一点电荷, 为了使它所产生的电位在球面上恰巧与  $M_0$  处单位电荷所产生的电位抵消, 必须假设在  $M_1$  处的点电荷的带电量为  $-\frac{R}{\rho_0}$ , 因此

$$g(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{R}{\rho_0} \frac{1}{r_{M_1 M}}, \quad \left( \text{因为 } M \in B(0, R), M_1 \in B^c(0, R), M \neq M_1, \text{ 所以 } \Delta\left(\frac{1}{r_{M_1 M}}\right) = 0 \right)$$

故以  $K$  为球面的球上的格林函数为

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_{M_0 M}} - \frac{R}{\rho_0} \frac{1}{r_{M_1 M}} \right). \quad (3.6)$$

由(3.6)可求出方程(1.1)在此球上满足边界条件

$$u|_K = f \quad (3.7)$$

的狄利克雷问题的解。为此要算出  $\frac{\partial G}{\partial n}$  在球面  $K$  上的值。注意到

$$\frac{1}{r_{M_0 M}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho \cos \gamma}}, \quad \left( \text{利用余弦公式 } a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = c^2 \right)$$

$$\frac{1}{r_{M_1 M}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho^2 - 2\rho_1\rho \cos \gamma}},$$



## §3 格林函数

## 2. 静电源像法

其中  $\rho = r_{OM}$ ,  $\gamma$  是  $OM_0(OM_1)$  和  $OM$  的夹角, 并利用(3.5)-(3.6)就得到格林函数

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho \cos \gamma}} - \frac{R}{\sqrt{\rho_0^2\rho^2 - 2R^2\rho_0\rho \cos \gamma + R^4}} \right].$$

而在球面  $K$  上,  $\mathbf{n} = \vec{\rho}$ , 故

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\rho=R} &= \frac{\partial G}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\rho - \rho_0 \cos \gamma}{(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\rho_0^2\rho - R^2\rho_0 \cos \gamma) R}{(\rho_0^2\rho^2 - 2R^2\rho_0\rho \cos \gamma + R^4)^{\frac{3}{2}}} \right\} \Big|_{\rho=R} \\ &= -\frac{1}{4\pi R} \frac{R^2 - \rho_0^2}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

于是, 由(3.4)就得到球上的狄利克雷问题(1.1), (3.7)的解的表达式为

$$u(M_0) = -\iint_K f \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dS_M = \frac{1}{4\pi R} \iint_K \frac{R^2 - \rho_0^2}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} f(M) dS_M \quad \text{—泊松公式} \quad (3.8)$$



## §3 格林函数

## 2. 静电源像法

或写成球坐标的形式, 令  $x = R \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = R \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = R \cos \theta$ , 则  $dS_M = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ ,

$$u(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(R, \theta, \varphi) \frac{R^2 - \rho_0^2}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} \sin \theta d\theta d\varphi, \quad \text{—泊松公式} \quad (3.8')$$

其中  $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$  或  $(x_0, y_0, z_0)$  是点  $M_0$  的坐标,  $(R, \theta, \varphi)$  或  $(x, y, z)$  是球面  $K$  上点  $M$  的坐标,

$$\cos \gamma = \begin{cases} \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0), & \text{在球坐标系下,} \\ \frac{x_0 x + y_0 y + z_0 z}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, & \text{在直角坐标系下.} \end{cases}$$

事实上, 在球坐标系下, 矢量  $\overrightarrow{OM_0}$  和  $\overrightarrow{OM}$  的方向余弦分别为

$$(\sin \theta_0 \cos \varphi_0, \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \cos \theta_0) \quad \text{与} \quad (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).$$

利用  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta})$ , 可得

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 (\cos \varphi \cos \varphi_0 + \sin \varphi \sin \varphi_0) \\ &= \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0). \end{aligned}$$

$$\text{同理, 在直角坐标系下, } \cos \gamma = \frac{\overrightarrow{OM_0} \cdot \overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM_0}| |\overrightarrow{OM}|} = \frac{x_0 x + y_0 y + z_0 z}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$



## §3 格林函数

## 2. 静电源像法

用静电源像法求半空间的狄利克雷问题, 即

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & z_0 > 0 \\ u|_{z=0} = f(x, y). \end{cases}$$

此时, 点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  的对称点为  $M_1(x_0, y_0, -z_0)$ , 其中  $z_0 > 0$ 。则格林函数为

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}} \right]. \quad (3.9)$$

对于半空间  $z > 0$  来讲, 取平面  $z = 0$  的外法向导数为  $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ , 则

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} = \nabla G \cdot \mathbf{n} = \left( \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right) \cdot (0, 0, -1) = -\frac{\partial G}{\partial z}.$$



## §3 格林函数

## 2. 静电源像法

此外, 由上节习题 4 可知, 对半空间的情形, 对调和函数  $u(x, y, z)$  加上在无穷远处的条件:

$$u(M) = O\left(\frac{1}{r_{OM}}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = O\left(\frac{1}{r_{OM}^2}\right) \quad (r_{OM} \rightarrow \infty),$$

公式(2.6)仍成立, 因而由格林函数表示的求解公式(3.4)也成立。于是利用(3.4)就可得到上半空间上调和方程的狄利克雷问题的解的表达式

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}} \right] \Big|_{z=0} dx dy \\ &= \frac{z_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x, y)}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2]^{\frac{3}{2}}} dx dy. \end{aligned} \quad (3.10)$$



## §3 格林函数

## 2. 静电源像法

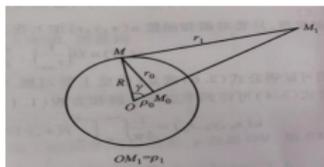
圆上二维调和方程的狄利克雷问题

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x^2 + y^2 < R^2, \quad (3.11)$$

$$u|_{x^2+y^2=R^2} = f(\theta), \quad (3.12)$$

其中  $\theta$  是极坐标的角度。

在二维情况下, 利用镜像法, 以  $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$  代替  $\frac{1}{4\pi r}$ 。设  $M_0$  是圆内一点,  $M_1$  是  $M_0$  关于圆周的对称点, 于是与球的做法一样, 可得圆上的格林函数  $G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left[ \ln \frac{1}{r_{M_0 M}} - \ln \frac{R}{\rho_0} \frac{1}{r_{M_1 M}} \right]$ 。



注意到

$$\frac{1}{r_{M_0 M}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0 \rho \cos \gamma}}, \quad \frac{1}{r_{M_1 M}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho^2 - 2\rho_1 \rho \cos \gamma}},$$

又  $\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM}$  的方向余弦分别为  $(\cos \theta_0, \sin \theta_0), (\cos \theta, \sin \theta)$ , 故



## §3 格林函数

## 2. 静电像法

$$\cos \gamma = \cos(\theta - \theta_0) = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0.$$

再利用  $\rho_0 \rho_1 = R^2$ , 可得在圆周  $\rho = R$  上,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\rho=R} &= \left. \frac{\partial G}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \frac{1}{2\pi} \left[ \ln \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0 \rho \cos \gamma}} - \ln \frac{R}{\sqrt{\rho_0^2 \rho^2 - 2R^2 \rho_0 \rho \cos \gamma + R^4}} \right] \right\} \Bigg|_{\rho=R} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\rho - \rho_0 \cos \gamma}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho_0 \rho \cos \gamma} - \frac{R}{\rho_0^2 \rho^2 - 2R^2 \rho_0 \rho \cos \gamma + R^4} \right\} \Bigg|_{\rho=R} \\ &= -\frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - \rho_0^2}{\rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma + R^2}. \end{aligned}$$

这样圆上的狄利克雷问题(3.11)-(3.12)解的表达式为

$$\begin{aligned} u(\rho_0, \theta_0) &= \frac{1}{2\pi R} \int_{x^2+y^2=R^2} \frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma + \rho_0^2} f(\theta) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \rho_0^2) f(\theta)}{R^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) + \rho_0^2} d\theta, \end{aligned} \quad (3.13)$$

同样称为泊松公式。



## §3 格林函数

## 3. 解的验证

**补充定理 (积分号下求导):** 设  $f(x, y)$  和  $f_x(x, y)$  在  $[a, b] \times [c, d]$  上连续, 则有  $I(x) = \int_c^d f(x, y)dy$  在  $[a, b]$  上有连续的导函数且  $I'(x) = \int_c^d f_x(x, y)dy$ .

下面仅对圆的情形进行验证, 其他情形类似可证。由格林函数的对称性可知

$$\text{当 } M \text{ 在圆内, } \Delta_{M_0} G(M, M_0) = 0,$$

$$\text{当 } M_0 \text{ 在圆内, } M \text{ 在圆周上时, } \Delta_{M_0} G(M, M_0) = 0, \quad \Delta_{M_0} \left( \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(M, M_0) \right) = 0.$$

又

$$u(M_0) = - \int_{\Gamma} f(M) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(M, M_0) dS_M,$$

这里的  $\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(M, M_0) = \nabla_M G(M, M_0) \cdot \mathbf{n}$ 。故利用上面补充的定理知, 可通过积分号下求导得

$$\Delta_{M_0} u(M_0) = - \int_{\Gamma} f(M) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \Delta_{M_0} G(M, M_0) \right) dS_M = 0.$$

因此 (3.13) 式给出的函数确实在圆内满足调和方程 (1.1)。

再证函数  $u$  满足边界条件(3.12), 即当  $(\rho_0, \theta_0) \rightarrow (R, \theta_1)$  时,  $u(\rho_0, \theta_0) \rightarrow f(\theta_1)$ 。



## §3 格林函数

## 3. 解的验证

令  $\varphi = \theta - \theta_0$ , 则  $\cos(\theta - \theta_0)$  是  $\theta$  的周期函数, 周期为  $2\pi$ 。又  $f(x, y) = f(r \cos \theta, y \sin \theta) = f(\theta)$ , 所以它也是  $\theta$  的以  $2\pi$  为周期的函数。从而(3.13)式可改写为

$$u(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(R^2 - \rho_0^2)f(\varphi + \theta_0)}{R^2 - 2R\rho_0 \cos \varphi + \rho_0^2} d\varphi. \quad (3.14)$$

在利用格林函数的性质 5, 有

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(R^2 - \rho_0^2)}{R^2 - 2R\rho_0 \cos \varphi + \rho_0^2} d\varphi,$$

所以

$$u(\rho_0, \theta_0) - f(\theta_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(R^2 - \rho_0^2)}{R^2 - 2R\rho_0 \cos \varphi + \rho_0^2} [f(\varphi + \theta_0) - f(\theta_1)] d\varphi. \quad (3.15)$$

我们要证, 当  $(\rho_0, \theta_0) \rightarrow (R, \theta_1)$  时, (3.15) 式右端的积分区域零。假设  $f$  连续, 则对任意给定的正数  $\varepsilon$ , 存在正数  $\eta$ , 使得在区间  $-\eta \leq \varphi \leq \eta$  上, 当  $\theta_0$  足够接近  $\theta_1$  时, 有  $|f(\varphi + \theta_0) - f(\theta_1)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ 。再令

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(R^2 - \rho_0^2)}{R^2 - 2R\rho_0 \cos \varphi + \rho_0^2} [f(\varphi + \theta_0) - f(\theta_1)] d\varphi &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{-\eta} \cdot d\varphi + \int_{-\eta}^{\eta} \cdot d\varphi + \int_{\eta}^{\pi} \cdot d\varphi \right) \\ &:= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$



## §3 格林函数

## 3. 解的验证

于是

$$|u(\rho_0, \theta_0) - f(\theta_1)| = |I_1 + I_2 + I_3| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3|.$$

在区间  $(-\pi, -\eta)$  上  $\cos \varphi \leq \cos \eta$ , 则

$$\begin{aligned} R^2 - 2R\rho_0 \cos \varphi + \rho_0^2 &\geq R^2 - 2R\rho_0 \cos \eta + \rho_0^2 \\ &= (R - \rho_0)^2 + 2R\rho_0(1 - \cos \eta) \\ &\geq 4R\rho_0 \sin^2 \frac{\eta}{2}, \end{aligned}$$

又因为  $f$  连续, 所以  $|f(\varphi + \theta_0) - f(\theta_1)| \leq M$ , 从而

$$|I_1| \leq \frac{M}{8\pi R\rho_0 \sin^2 \frac{\eta}{2}} (R^2 - \rho_0^2)(\pi - \eta). \quad (3.16)$$

同理

$$|I_3| \leq \frac{M}{8\pi R\rho_0 \sin^2 \frac{\eta}{2}} (R^2 - \rho_0^2)(\pi - \eta).$$

故当  $\rho_0 \rightarrow R$  时,  $I_1, I_3 \rightarrow 0$ .



## §3 格林函数

## 3. 解的验证

对  $I_2$ , 由于  $\frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 - 2R\rho_0 \cos \varphi + \rho_0^2} \geq 0$ , 故

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\eta}^{\eta} \frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 - 2R\rho_0 \cos \varphi + \rho_0^2} d\varphi \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 - 2R\rho_0 \cos \varphi + \rho_0^2} d\varphi = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

利用  $\varepsilon$  的任意性可知, 当  $(\rho_0, \theta_0) \rightarrow (R, \theta_1)$  时,  $u(\rho_0, \theta_0) \rightarrow f(\theta_1)$ 。这就证明了 (3.13) 式表示的  $u(\rho_0, \theta_0)$  确实是圆上狄利克雷问题 (3.11) - (3.12) 解。



## §3 格林函数

## 4\*. 单连通区域的格林函数

$$G_1(\zeta, \zeta_0) = g(f(\zeta), f(\zeta_0)). \quad (3.18)$$

$$G_1(\zeta, \zeta_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\zeta - \bar{\zeta}_0}{\zeta - \zeta_0} \right|. \quad (3.19)$$



## §3 格林函数

## 5. 调和函数的基本性质

## 定理 3.1

(哈那克第一定理 (关于调和函数序列的一致收敛性定理)) 如果函数序列  $\{u_k\}$  中的每一个函数在有限区域  $\Omega$  中都是调和函数, 在闭区域  $\Omega \cup \Gamma$  ( $\Gamma$  是  $\Omega$  的边界) 上连续, 而且这函数序列在  $\Gamma$  上一致收敛, 则它在  $\Omega$  中也是一致收敛, 并且极限函数  $u$  在区域  $\Omega$  中也是调和函数。

证 记  $u_k|_{\Gamma} = f_k$ 。由假设知,  $\{f_k\}$  在  $\Gamma$  上一致收敛, 即  $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ , 使当  $n, m > N$  时, 在  $\Gamma$  上处处有  $|f_n - f_m| \leq \varepsilon$ 。则由极值原理知, 在  $\Omega$  中处处有  $|u_n - u_m| \leq \varepsilon$ 。由柯西定理知,  $u_k \rightrightarrows u$ 。下证  $u$  在  $\Omega$  中调和和只要证在  $\Omega$  中任一点的邻域中是调和函数即可。

任取  $M_0 \in \Omega$ , 以  $M_0(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$  为球心的球  $K \subset \Omega$ , 半径为  $R$ 。则在球  $K$  上

$$u_k(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} u_k(R, \theta, \varphi) \times \frac{R^2 - \rho_0^2}{\left(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 [\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]\right)^{\frac{3}{2}}} \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (3.20)$$

因  $u_k \rightrightarrows u$ , 令  $k \rightarrow \infty$ , 得到

$$u(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} u(R, \theta, \varphi) \times \frac{R^2 - \rho_0^2}{\left(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 [\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]\right)^{\frac{3}{2}}} \sin \theta d\theta d\varphi.$$

$u$  仍能用泊松公式表示, 故  $u$  是球  $K$  内的调和函数。定理证毕。



## §3 格林函数

## 5. 调和函数的基本性质

## 定理 3.2

(哈那克第二定理) 设  $\{u_k\}$  是  $\Omega$  上的一个单调不减的调和函数序列, 若它在  $\Omega$  内的某一点  $P$  收敛, 则它在  $\Omega$  中处处收敛于一个调和函数  $u$ , 并且这种收敛在  $\Omega$  的任一闭子区域上是一致的。

证 以  $P$  为球心,  $R$  为半径做球  $K_R \subset \Omega$ 。设  $Q \in K_R$ 。对  $K_R$  中的任意调和函数  $w$ , 由泊松公式知

$$w(Q) = \frac{1}{4\pi R} \iint_{\partial K_R} \frac{R^2 - \rho_0^2}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} w(M) dS_M.$$

若  $w \geq 0$ , 注意到  $(R - \rho_0)^2 \leq R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma \leq (R + \rho_0)^2$ , 则有

$$\frac{R^2 - \rho_0^2}{(R + \rho_0)^3} \leq \frac{R^2 - \rho_0^2}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{R^2 - \rho_0^2}{(R - \rho_0)^3}$$

于是

$$\frac{1}{4\pi R} \iint_{\partial K_R} w(M) dS_M \frac{R - \rho_0}{(R + \rho_0)^2} \leq w(Q) \leq \frac{1}{4\pi R} \iint_{\partial K_R} w(M) dS_M \frac{R + \rho_0}{(R - \rho_0)^2}.$$

利用调和函数的平均值公式, 上式为



## §3 格林函数

## 5. 调和函数的基本性质

$$\frac{R - \rho_0}{(R + \rho_0)^2} R \cdot w(P) \leq w(Q) \leq \frac{R + \rho_0}{(R - \rho_0)^2} R \cdot w(P). \quad (\text{哈那克不等式}) \quad (3.21)$$

令  $v_k = u_k - u_{k-1} \geq 0, k = 2, 3, \dots$ . 对  $v_k$  用哈那克不等式得到

$$\frac{R - \rho_0}{(R + \rho_0)^2} R \cdot v_k(P) \leq v_k(Q) \leq \frac{R + \rho_0}{(R - \rho_0)^2} R \cdot v_k(P). \quad (3.22)$$

对任意的  $m, n > m$ ,  $u_n - u_m = \sum_{k=m+1}^n v_k$ . 又  $\{u_k(P)\}$  收敛, 则由上式知,  $\{u_k(Q)\}$  在  $K_{R/2}$  上一致收敛. 由哈那克第一定理, 在  $K_{R/2}$  上,  $u_k(Q) \rightrightarrows u(Q)$ .

对任一点  $M \in \Omega$ , 可用完全落在  $\Omega$  中的折线  $\gamma$  连接  $P$  和  $M$ , 而  $\gamma$  又可以用有限个完全落在  $\Omega$  中的球覆盖. 对这些球逐一用上述推理, 即得  $\{u_k\}$  在点  $M$  收敛, 从而在  $\Omega$  内处处收敛于调和函数  $u$  (参见定理 2.3 的证明).

设  $F$  是  $\Omega$  中任一有界闭集, 由有限覆盖定理, 存在有限个完全落在  $\Omega$  中的闭球  $K_i, i = 1, 2, \dots, L$  覆盖  $F$ . 因  $\{u_k\}$  在  $\Omega$  中处处收敛, 特别在每个闭球的球心  $M_i$  处收敛, 从而  $\{u_k\}$  在  $K_i$  上一致收敛. 定理证毕.



## §3 格林函数

## 5. 调和函数的基本性质

## 定理 3.3

设  $u$  是区域  $\Omega$  中的非负调和函数, 则对  $\Omega$  中的任一闭子区域  $\overline{\Omega}'$ , 存在仅与  $\Omega'$  有关的正常数  $C$ , 使得

$$\max_{\overline{\Omega}'} u \leq C \min_{\overline{\Omega}'} u. \quad (3.23)$$

**证** 记  $\overline{\Omega}'$  与  $\Omega$  的边界  $\Gamma$  的距离为  $R$ . 由有限覆盖定理,  $\overline{\Omega}'$  可由  $N$  个半径为  $\frac{R}{2}$  的球覆盖. 对  $0 \leq \rho_0 \leq \frac{R}{2}$ , 有  $R - \rho_0 \geq \frac{R}{2}, R + \rho_0 \leq \frac{3R}{2}$ , 则

$$\frac{R - \rho_0}{(R + \rho_0)^2} R \geq \frac{2}{9}, \quad \frac{R + \rho_0}{(R - \rho_0)^2} R \leq 6.$$

利用哈那克不等式 (3.21) 可, 对任一用于覆盖  $\overline{\Omega}'$  的半径为  $\frac{R}{2}$  的球中的任意两点  $P_1, P_2$ , 成立

$$\frac{2}{9} u(P_1) \leq 6u(P_2), \implies u(P_1) \leq 27u(P_2).$$

由于  $u$  在  $\overline{\Omega}'$  上的极大点与极小点必分别落在某个半径为  $\frac{R}{2}$  的覆盖球中, 取  $C = (27)^N$ , 即得(3.23)。



## §3 格林函数

## 5. 调和函数的基本性质

## 定理 3.4

(可去奇点定理) 设  $u(M) = u(x, y, z)$  在点  $A$  的邻域中除点  $A$  外是调和函数, 在  $A$  点附近成立

$$\lim_{M \rightarrow A} r_{AM} \cdot u(M) = 0, \left( \iff u(M) = o\left(\frac{1}{r_{AM}}\right) \right) \quad (3.24)$$

其中  $r_{AM}$  表示  $A$  点和  $M$  点的距离, 则总可以重新定义函数  $u$  在  $A$  点的值, 使  $u(M)$  在整个所考虑的点  $A$  的邻域中 (包括点  $A$  本身在内) 是调和函数。

**证** 由于调和函数平移之后还是调和函数, 所以不妨设点  $A$  就是坐标原点。设  $K$  是以  $A$  为心、 $R$  为半径的球, 它整个地包含在点  $A$  所考察的邻域中。可由泊松公式求得如下问题的解,

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \text{ in } K, \\ v|_{\partial K} = u|_{\partial K}. \end{cases}$$

记为  $u_1$ 。我们要证明, 在整个球  $K$  内除点  $A$  外  $u \equiv u_1$ 。这样, 重新定义  $u$  在点  $A$  的值等于  $u_1$  在点  $A$  的值就可以了。记  $w = u - u_1$ , 则  $\Delta w = 0$  (除  $A$  点外),  $w|_{\partial K} = 0$ 。又因为  $u_1$  在  $\bar{K}$  上连续, 故有界, 而当  $M \rightarrow A$  时,  $r_{AM} \rightarrow 0$ 。于是, 当  $M \rightarrow A$  时,  $r_{AM} \cdot u_1(M) \rightarrow 0$ 。再结合(3.24), 有

$$\lim_{M \rightarrow A} r_{AM} \cdot w(M) = \lim_{M \rightarrow A} r_{AM} \cdot w(M), \left( r_{AM} \cdot u(M) - r_{AM} \cdot u_1(M) \right) = 0. \quad (3.25)$$



## §3 格林函数

## 5. 调和函数的基本性质

现证在整个球  $K$  内除点  $A$  外  $w \equiv 0$ 。对任意  $\varepsilon > 0$ ，作函数

$$w_\varepsilon(M) = \varepsilon \left( \frac{1}{r_{AM}} - \frac{1}{R} \right), \quad (3.26)$$

它满足: (1)  $w_\varepsilon|_{\partial K} = 0$ ; (2) 在  $K$  内除  $A$  点外,  $w > 0$ ; (3) 在球  $r = \delta$  及  $r = R$  所包围的同心球壳  $D$  内,  $\Delta w_\varepsilon = 0$ , 这里  $\delta > 0$  是任意小的正数。

对任意给定的  $M^* \in K \setminus A$  和  $\varepsilon > 0$ , 由(3.25)式不难得到, 当  $M \rightarrow A$  时,  $r_{AM} \cdot w(M) \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon(R - r_{AM}) \rightarrow \varepsilon R$ , 于是

$$\lim_{M \rightarrow A} \frac{w(M)}{w_\varepsilon(M)} = \lim_{M \rightarrow A} \frac{R \cdot r_{AM} \cdot w(M)}{\varepsilon(R - r_{AM})} = \frac{0}{\varepsilon R} = 0.$$

因此, 由上面关系式, 可以找到适当的  $\delta > 0$ , 使在球面  $r = \delta$  上

$$|w| \leq w_\varepsilon, \quad (3.27)$$

在  $K$  的球面上,  $w = w_\varepsilon = 0$ 。故由定理 2.3 (极值原理), 对  $D$  中的任一点, (3.27)都成立。所以对点  $M^*$  有

$$|w(M^*)| \leq w_\varepsilon(M^*). \quad (3.28)$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 即得  $w(M^*) = 0$ 。又  $M^*$  是  $M \setminus A$  中任一点, 因此在整个球  $K$  内除  $A$  点外  $w = 0$ 。定理证毕。  $\square$



## §3 格林函数

## 5. 调和函数的基本性质

**推论** 如果  $A$  确实是调和函数  $u(M)$  的孤立奇点 (即是不可除去的奇点), 那么  $u(M)$  在  $A$  点附近趋于无穷大的阶数不会低于  $\frac{1}{r_{AM}}$ 。(反证法, 若为高阶无穷小, 则为可去奇点, 矛盾。)

**注:** 若为二维情形, 将(3.24)换成  $\lim_{M \rightarrow A} \frac{u(M)}{\frac{1}{r_{AM}}} = 0$  并在证明过程中取  $w_\varepsilon(M) = \varepsilon \left( \ln \frac{1}{r_{AM}} - \ln \frac{1}{R} \right)$  即可。

## 定理 3.5

(调和函数的解析定理) 设  $u(M_0)$  是区域  $\Omega$  中的调和函数, 那么它在  $\Omega$  中是关于自变量  $x_0, y_0, z_0$  的解析函数, 也就是说在  $\Omega$  中任一点  $M_0^*(x_0^*, y_0^*, z_0^*)$  的附近, 它都可以展开成  $x - x_0^*, y - y_0^*, z - z_0^*$  的幂级数。

**注:** 这有什么用呢? 事实上, 若在区域  $\Omega$  上,  $\Delta u = 0$ , 则可推出  $u \in C^\infty$ , 即  $u$  有任意阶导数。

**证** 对  $\Omega$  中任一点  $M_0^*(x_0^*, y_0^*, z_0^*)$ , 以  $M_0^*$  为心、 $R$  为半径作一球  $K \subset \Omega$ 。由于在  $K$  中  $\Delta u = 0$ , 由泊松公式知

$$\begin{aligned} u(M_0) &= \frac{1}{4\pi R} \iint_{\partial K} u(M) \frac{R^2 - \rho_0^2}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} dS_M \\ &= \frac{1}{4\pi R} \iint_{\partial K} u(M) \frac{R^2 - \rho_0^2}{r_{M_0 M}^3} dS_M \end{aligned}$$

不失一般性, 设  $M_0^*$  为坐标原点, 我们要证明  $u(M_0)$  在点  $M_0^*(0, 0, 0)$  附近可展成  $x_0, y_0, z_0$  的幂级数。



## §3 格林函数

## 5. 调和函数的基本性质

注意到当  $x < 1$  时,  $\frac{1}{1-x}$  可展成幂级数. 由于  $M_0$  在  $M_0^*$  附近, 而  $M \in \partial K$ , 所以

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 > 0 \implies 2(x_0x + y_0y + z_0z) - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) < x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

即  $\frac{2(x_0x + y_0y + z_0z) - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)}{R^2} < 1$ , 从而可得, 在  $\partial K$  上,

$$\begin{aligned} & (R^2 - \rho_0^2) r_{M_0M}^{-3} \\ &= [R^2 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)] [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{-\frac{3}{2}} \\ &= [R^2 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)] [x^2 + y^2 + z^2 - 2(x_0x + y_0y + z_0z) + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2]^{-\frac{3}{2}} \\ &= [R^2 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)] \left[ R^2 \left( 1 - \frac{2(x_0x + y_0y + z_0z) - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)}{R^2} \right) \right]^{-\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

再利用二项式定理:  $\alpha \in \mathbb{R}, (a+b)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} a^{\alpha-k} b^k$ ,  $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ , 可将上式的最后一个等式右端展开为  $x_0, y_0, z_0$  的幂级数. 当  $(x, y, z) \in \partial K$ ,  $(x_0, y_0, z_0)$  在原点附近时这以幂级数时一致收敛的, 因此可逐项积分, 且在积分后仍得到一个关于  $x_0, y_0, z_0$  为一致收敛得幂级数, 从而  $u(M_0)$  在  $M_0 = M_0^*$  处解析. 由点  $M_0^*$  的任意性可知  $u(M_0)$  在  $\Omega$  内处处解析. 定理证毕.



## §4 强极值原理、第二边值问题解的唯一性

## 1. 强极值原理

我们知道,调和方程描写的是稳态平衡的物理现象。仍以稳定的热传导情形为例,由极值原理知道,温度的最高点及最低点必在物体的边界上取到。对在边界上的温度最低点(对温度最高点也类似地讨论),物体其它各点的热量必流向它,并且通过它流向物体外部,因此在该点应有  $\frac{\partial u}{\partial n} \leq 0$  (这里  $\mathbf{n}$  是外法线方向)。然而,通过数学上的进一步分析和论证,可得如下更强的结果。

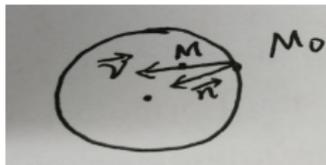
## 定理 4.1

(强极值原理) 设半径为  $R$  的某一球上(包括球面在内)给定一个连续函数  $u(x, y, z)$ , 它在此球内的所有内点  $(x, y, z)$ , 成立着  $u(x, y, z) > u(x_0, y_0, z_0)$ , 其中  $(x_0, y_0, z_0)$  是球面上的某定点。如果函数  $u(x, y, z)$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  沿方向  $\nu$  的方向导数存在, 而方向  $\nu$  与球的内法线方向成锐角, 则在点  $(x_0, y_0, z_0)$  成立  $\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0$ 。

注: 此区域是球。

注: 若取  $\nu = -\mathbf{n}$ , 则有  $\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0$ 。

注: 方向导数的定义: 如下图, 设  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $M(x, y, z)$ , 则  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(M_0) = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{|M - M_0|}$ , 分子体现方向。



## §4 强极值原理、第二边值问题解的唯一性

## 1. 强极值原理

**证** 因为调和函数在经过坐标轴的平移变换后仍是调和函数，我们不妨设球心就是坐标原点。由于  $u(x, y, z)$  在点

$(x_0, y_0, z_0)$  取最小值，因此在点  $(x_0, y_0, z_0)$  总有  $\frac{\partial u}{\partial \nu} \geq 0$ 。下面我们要证上式中的等号不能成立。

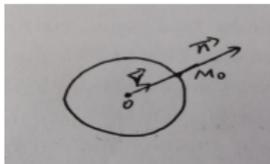
若能引进一函数  $\tilde{u}(x, y, z)$  使  $w = u - \tilde{u}$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  附近仍成立  $w(x, y, z) \geq w(x_0, y_0, z_0)$ ，而函数  $\tilde{u}(x, y, z)$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处的方向导数  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} > 0$ ，那么由于在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处有  $\frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu} \geq 0$ ，于是就有  $\frac{\partial u}{\partial \nu} \geq \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} > 0$ 。事实上，取  $\tilde{u} = \varepsilon v + u(x_0, y_0, z_0)$  使得函数  $\tilde{u}(x, y, z)$  的图像能插入函数  $u(x, y, z)$  的图像与高度为  $u(x_0, y_0, z_0)$  的超平面之间。显然，在  $(x_0, y_0, z_0)$  点函数  $v$  应取其极小值 0 且  $\frac{\partial v}{\partial \nu} > 0$ ，并在该点附近成立  $\varepsilon v + u(x_0, y_0, z_0) < u$ 。函数  $v$  可以有多种选取方式。为了运算的方便，我们将使它的形式尽可能地简单。于是，取  $v$  是变量  $r$  的函数 ( $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ )，即取  $v(x, y, z) = e^{-a(x^2 + y^2 + z^2)} - e^{-aR^2}$ ，其中  $a$  为待定的正常数。则它满足

(1) 在球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  上  $v = 0$ ;

(2)  $v$  沿球的半径方向的导数  $\frac{dv}{dr}$  存在，且  $r > 0$  时  $\frac{dv}{dr} < 0$ ，即  $v$  是  $r$  的减函数。因为  $v_x = \frac{\partial v}{\partial r} r_x$ ，从而

$$\nabla v = \frac{dv}{dr}(r_x, r_y, r_z) = \frac{dv}{dr}\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = \frac{dv}{dr}\vec{r}, \text{ 故在球面 } x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{ 上, } \vec{r} = \mathbf{n} \text{ 且}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \nabla v \cdot \boldsymbol{\nu} = \frac{dv}{dr} \vec{r} \cdot \boldsymbol{\nu} = \frac{dv}{dr} \cos(\boldsymbol{\nu}, \vec{r}) > 0;$$



## §4 强极值原理、第二边值问题解的唯一性

## 1. 强极值原理

(2) 在同心球壳所围成的闭区域  $D: \frac{R^2}{4} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  内  $v$  具有二阶连续偏导数且二阶偏导数为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = (-2a + 4a^2 x^2)e^{-a(x^2+y^2+z^2)}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = (-2a + 4a^2 y^2)e^{-a(x^2+y^2+z^2)},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = (-2a + 4a^2 z^2)e^{-a(x^2+y^2+z^2)}.$$

因此  $\Delta v = \{-6a + 4a^2(x^2 + y^2 + z^2)\}e^{-a(x^2+y^2+z^2)}$ 。由于在  $D$  上  $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{R^2}{4}$ ，取  $a$  适当大使得  $a > \frac{6}{R^2}$ ，则有  $\Delta v > 0$ 。

这样  $v(x, y, z)$  就取定，取定之后，则当  $\varepsilon > 0$  足够小时，函数  $\tilde{u} = \varepsilon v + u(x_0, y_0, z_0)$  就是我们要找的函数。事实上，在  $(x_0, y_0, z_0)$  点  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} = \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu} > 0$  显然满足，只需证当  $\varepsilon > 0$  足够小时，在区域  $D$  上成立

$$w(x, y, z) = u - \varepsilon v - u(x_0, y_0, z_0) \geq w(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

由于在  $D$  中  $\Delta w = \Delta u - \Delta \tilde{u} = -\Delta \tilde{u} < 0$ ，因此函数  $w$  在  $D$  内取不到其最小值。这是因为，假设

$M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$  是  $w$  的最小值点，令  $M = (x, y, z)$ ，则

$$\nabla w = Dw = \left( \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad D^2 w = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{pmatrix},$$



## §4 强极值原理、第二边值问题解的唯一性

## 1. 强极值原理

且  $D^2w(M_0)$  是对称矩阵。又因为  $M_0$  是最小值点，于是  $\nabla w(M_0) = 0$ ,  $D^2w(M_0) \geq 0$ , 即  $D^2w(M_0)$  是对称正定矩阵，所以存在矩阵  $P(P^{-1} = P^T)$  使得

$$P^T D^2w(M_0)P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

再由泰勒展开知

$$\begin{aligned} 0 \leq u(M) - u(M_0) &= \nabla w(M_0) \cdot (M - M_0) + \frac{(M - M_0)^T D^2w(M_0)(M - M_0)}{2!} + o(|M - M_0|^2) \\ &= \frac{(M - M_0)^T D^2w(M_0)(M - M_0)}{2!} + o(|M - M_0|^2), \end{aligned}$$

于是  $\Delta w(M_0) = \text{tr}(D^2w(M_0)) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq 0$  与  $\Delta w < 0$  矛盾，故在  $D$  内不能取到其最小值。在球面

$\Gamma_R: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  上  $w(x, y, z) = 0$ ; 在球面  $\Gamma_{\frac{R}{2}}: x^2 + y^2 + z^2 = \frac{R^2}{4}$  上,  $v$  是常值, 球面  $\Gamma_{\frac{R}{2}}$  是有界闭

集,  $u$  连续, 故  $u$  在  $\Gamma_{\frac{R}{2}}$  上取得最大最小值, 所以  $\min_{\Gamma_{\frac{R}{2}}} u(M) := m > u(M_0)$ , 从而取  $0 < \varepsilon < \frac{m - u(M_0)}{v(\frac{R}{2})}$  可使

$w(M) = u(M) - \varepsilon v(\frac{R}{2}) - u(M_0) > 0$ . 这样在整个区域  $D$  上都有  $w(x, y, z) \geq 0$ , 这就是要证明的。定理证毕。

## §4 强极值原理、第二边值问题解的唯一性

## 1. 强极值原理

由上述对于球的强极值原理，可以得到一些更一般区域的强极值原理。

## 定理 4.2

设区域  $\Omega$  具有下述性质：对  $\Omega$  的边界  $\Gamma$  上的任一点  $M$ ，都可作一个属于区域  $\Omega$ （连同其边界  $\Gamma$ ）的球  $K_M$ ，使其在点  $M$  与  $\Gamma$  相切。如果不恒等于常数的调和函数  $u(x, y, z)$  在  $\Omega \cup \Gamma$  上连续，在边界点  $M_0$  处取最小（最大）值，则只要它在点  $M_0$  处关于  $\Omega$  的外法向导数  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  存在，其值必是负（正）的。

**证** 对任一边界点  $M_0$ ，由假设条件知，可取定一球  $K_{M_0}$ ，使它的所有内点都属于  $\Omega$ 。由于调和函数  $u(x, y, z)$  不恒等于常数，根据极值原理，它不能在  $\Omega$  的内点取到最小值，因此  $u(x, y, z)$  在  $K_{M_0}$  的所有内点上的值恒大于  $u$  在点  $M_0$  的值。由方向导数的定义知：
$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{u(M_0) - u(M)}{|MM_0|}, \quad \frac{\partial u}{\partial(-\mathbf{n})} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{|MM_0|} = -\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}.$$
在定理 4.1 中取  $\nu = -\mathbf{n}$ ，则有  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial(-\mathbf{n})}(M_0) > 0$ ，故  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(M_0) < 0$ 。最大值同理可证。定理证毕。  $\square$

**注：**定理 4.1 和定理 4.2 所表达的强极值原理又称为霍普夫（Hopf）极值原理。



## §4 强极值原理、第二边值问题解的唯一性

## 2. 第二边值问题解的唯一性

上端得到的强极值原理可以用来研究调和方程的第二边值问题的解的唯一性。现在研究调和方程(1.1)的诺伊曼内问题。容易看出此问题的解如果存在,那么就不会唯一。因为如果  $u$  是诺伊曼内问题的解,那么  $u + c$  也必是同一诺伊曼内问题的解,其中  $c$  为任意的常数。但我们可以证明下面的结论。

## 定理 4.3

如果区域  $\Omega$  的边界  $\Gamma$  满足定理 4.2 中的条件,那么同一个诺伊曼内问题的解彼此间只能相差一个常数。也就是说,诺伊曼内问题的解除去一常数外是唯一的。

**证** 设  $u_1(x, y, z)$  和  $u_2(x, y, z)$  在  $\Omega$  内都是调和函数,在  $\Omega \cap \Gamma$  上连续,而且在  $\Gamma$  上满足同样的边界条件:  $\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n} = f$ , 那么函数  $u = u_1 - u_2$  在  $\Omega$  内也是调和函数,在  $\Omega \cap \Gamma$  上连续,而且在  $\Gamma$  上  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ 。如果函数  $u$  不恒等于常数,则由极值原理,知其最小值必在  $\Gamma$  上达到,再由定理 4.2,在  $u$  取最小值的点处导数  $\frac{\partial u}{\partial n}$  就不能等于零,从而导致矛盾。因此  $u$  必等于一个常数。定理证毕。  $\square$



## §4 强极值原理、第二边值问题解的唯一性

## 2. 第二边值问题解的唯一性

现在我们来讨论诺伊曼外问题的唯一性。设区域  $\Omega$  的边界  $\Gamma$  具有这样的性质：在其上每一点均可作一完全落在  $\Omega$  外（即在外部区域  $\Omega'$  中）且于  $\Gamma$  相切的球，则称  $\Omega$  满足外切球条件。

## 定理 4.4

设区域  $\Omega$  满足外切球条件，则方程(1.1)的诺伊曼外问题的解如果存在，必是唯一的。

**证** 如果同一诺伊曼外问题有两个解  $u_1, u_2$ ，令  $v = u_1 - u_2$ ，则  $v$  满足边界条件  $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}'}|_{\Gamma} = 0$  ( $\mathbf{n}'$  为区域  $\Omega'$  的单位外法线方向)，在区域  $\Omega'$  中为调和，在  $\Omega' \cap \Gamma$  上连续，且在无穷远处一致地趋于零。据此可以证明  $v \equiv 0$ 。事实上，对任一点  $P \in \Omega'$ ，由于  $v$  在无穷远处的极限为零，故对任意给定的  $\varepsilon > 0$ ，必可找到充分大的  $R$ ，使在以  $R$  为半径的球面  $\Gamma_R: r = R$  上恒有  $|v| \leq \varepsilon$ 。由于在由  $\Gamma$  及  $\Gamma_R$  所围成的区域  $\Omega_R$  上函数  $v$  只能在球面  $r = R$  上取到极值， $v$  不能在  $\Omega_R$  内部取到极值，再按定理 4.2，它又不能在  $\Gamma$  上取到极值，所以  $v$  的极值只能在球面  $r = R$  上取到。因此在  $\Omega_R$  上任一点都有  $|v| \leq \varepsilon$ ，从而  $|v(P)| \leq \varepsilon$ 。由于  $\varepsilon$  可以任意小，故  $v(P) = 0$ ，而由于  $P$  是  $\Omega'$  中任意点，因此在整个  $\Omega'$  上，必有  $v \equiv 0$ 。由此得到解的唯一性。定理证毕。



## §4 强极值原理、第二边值问题解的唯一性

## 3. 用能量积分法证明边值问题的解的唯一性

我们已经用极值原理和强极值原理分别证明了调和方程第一边值问题解与第二边值问题的解的唯一性。如局限于讨论  $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  中的调和函数, 可以利用能量积分方法更简洁地证明这两类边值问题的解的唯一性。

在有界区域  $\Omega$  上的泊松方程的第一或第二边值问题的解的唯一性可以归结为讨论  $\Omega$  中的调和函数  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ , 在边界  $\Gamma$  上分别满足  $u = 0$  或  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$  是性态, 即如下的两个问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma} = 0. \end{cases}$$

我们已知, 对调和函数  $u$ , 能量积分(总位能)为

$$\begin{aligned} E(u) &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( u \frac{\partial u}{\partial z} \right) - u \Delta u \right] dx dy dz. \end{aligned}$$

由于  $u$  为调和函数, 并利用格林公式(用此公式就要求  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ ) 可得

$$E(u) = \frac{1}{2} \iint_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS.$$



## §4 强极值原理、第二边值问题解的唯一性

## 3. 用能量积分法证明边值问题的解的唯一性

在讨论第一边值问题唯一性时, 成立  $u|_{\Gamma} = 0$ ; 在讨论第二边值问题时, 成立  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma} = 0$ . 因此总是成立

$E(u) = 0$ , 从而, 在  $\Omega$  中成立

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

即  $u \equiv C$  (常数).

对第二边值问题, 上式已经意味着满足同一泊松方程第二边值问题的解最多只能相差一个常数, 即在允许相差一个常数意义下, 解是唯一的。

对于第一边值问题, 由于在边界  $\Gamma$  上成立  $u = 0$ , 因此只能成立  $u = 0$ , 这就证明了泊松方程第一边值问题的  $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  解是唯一的。

注: 通常只要求泊松方程的第一边值问题的经典解为  $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  函数, 这里尚不能得出在  $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  函数类中解的唯一性。



- ① 第一章 波动方程
  - ② 第二章 热传导方程
  - ③ 第三章 调和方程
  - ④ 第四章 二阶线性偏微分方程的分类与总结
- 二阶线性方程的分类
  - 二阶线性方程的特征理论
  - 三类方程的比较
  - 先验估计



## §1 二阶线性方程的分类

## 1. 两个自变量的方程

我们首先研究含两个自变量的二阶线性方程，前面遇到的一维热传导方程、弦振动方程以及二维调和方程都是其特例。

一般来说，方程所含的自变量越多，处理起来也越复杂。先从含两个自变量的方程入手。

记  $(x, y)$  为自变量，一般的二阶线性方程总可以写成

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f, \quad (1.1)$$

这里  $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$  以及  $f$  都是变量  $x, y$  在某一区域  $\Omega$  上的实函数，并通常假设它们适当光滑，例如连续可导。我们希望通过适当的自变量的变换与未知函数的线性变换使方程(1.1)简化，并在此基础上对方程进行分类。

$$\text{自变量的变换:} \quad \text{方程}(A) \xrightleftharpoons[\text{可逆的自变量变换}]{\text{自变量的变换}} \text{方程}(B)$$

$$\text{未知函数的变换:} \quad \text{方程}(A) \xrightleftharpoons[\text{可逆的未知函数变换}]{\text{未知函数的变换}} \text{方程}(B)$$

如果方程  $(B)$  的形式比方程  $(A)$  的形式简单，那么直接研究方程  $(B)$  就比较方便。



## §1 二阶线性方程的分类

## 2. 两个自变量的二阶线性方程的化简

对方程(1.1)在区域  $\Omega$  中某点  $(x_0, y_0)$  的附近简化。作自变量的变换

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y). \quad (1.2)$$

假设变换(1.2)二阶连续可导, 且使函数行列式

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

在点  $(x_0, y_0)$  不等于零。根据隐函数存在定理, 在点  $(x_0, y_0)$  附近变换(1.2)是可逆的。于是方程(1.1)可化为关于自变量  $\xi, \eta$  的偏微分方程

$$\bar{a}_{11} u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12} u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22} u_{\eta\eta} + \bar{b}_1 u_{\xi} + \bar{b}_2 u_{\eta} + \bar{c}u = \bar{f}. \quad (1.4)$$



## §1 二阶线性方程的分类

## 2. 两个自变量的二阶线性方程的化简

计算可得

$$\begin{aligned}u_x(x, y) &= \left( u(\xi(x, y), \eta(x, y)) \right)_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\u_{xx} &= \left( u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \right)_x = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\eta \eta_{xx}.\end{aligned}$$

其他类似可算, 于是有

$$\begin{cases}u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\eta \eta_{xx}, \\u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}, \\u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\eta \eta_{yy}.\end{cases} \quad (1.5)$$

又因为  $u_{\xi\eta} = u_{\eta\xi}$ , 故方程(1.4)中的  $\bar{a}_{11}, \bar{a}_{12}, \bar{a}_{22}$  为

$$\begin{cases}\bar{a}_{11} = a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2, \\ \bar{a}_{12} = a_{11} \xi_x \eta_x + a_{12} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + a_{22} \xi_y \eta_y, \\ \bar{a}_{22} = a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2.\end{cases} \quad (1.6)$$



## §1 二阶线性方程的分类

## 2. 两个自变量的二阶线性方程的化简

设法取变换(1.2), 使方程(1.4)的二阶偏导数项化成最简单的形式。注意到(1.6)中的第一式和第三式的形式完全相同, 因此, 如果能选择方程

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \quad (1.7)$$

的两个函数无关的解  $\varphi = \varphi_1(x, y)$  及  $\varphi = \varphi_2(x, y)$ , 取

$$\begin{cases} \xi = \varphi_1(x, y), \\ \eta = \varphi_2(x, y), \end{cases}$$

则方程(1.4)中的系数  $\bar{a}_{11}, \bar{a}_{22}$  就变为零。这样, (1.4)式就较(1.1)式大为简化了。

关于  $\varphi$  的一阶偏微分方程(1.7)的求解问题可转化为求常微分方程在  $(x, y)$  平面上的积分曲线问题:

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0. \quad (1.8)$$

事实上,  $\varphi(x, y) = c \Rightarrow \varphi_x dx + \varphi_y dy = 0 \xrightarrow[\varphi_y \neq 0]{\text{不妨设}} \frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{dy}{dx},$

所以代入方程(1.7)有



## §1 二阶线性方程的分类

## 2. 两个自变量的二阶线性方程的化简

$$\begin{aligned} \left( a_{11} \left( \frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\varphi_x}{\varphi_y} + a_{22} \right) \varphi_y^2 = 0 &\Rightarrow a_{11} \left( -\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} = 0 \\ &\Rightarrow a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0. \end{aligned}$$

**补充定理:** 设  $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$ , 则函数  $z = \varphi(x, y)$  是(1.7)的解的充要条件是函数  $\varphi(x, y) = c$  是方程(1.8)的通积分(积分曲线),  $c$  为任意常数。

于是, 设  $\varphi_1(x, y) = c$  是方程(1.8)的一族积分曲线, 则  $z = \varphi(x, y)$  就是方程(1.7)的一个解。称方程(1.8)的积分曲线为方程(1.1)的特征线, 称方程(1.8)为特征方程。

下面求方程(1.8)的积分曲线, 将方程(1.8)分解成两个方程

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \\ \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.9a) \\ (1.9b) \end{matrix}$$



## §1 二阶线性方程的分类

## 2. 两个自变量的二阶线性方程的化简

(1) 在点  $(x_0, y_0)$  附近  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ 。此时方程(1.9a)和(1.9b)右端取相异的实值, 故(1.8)的积分曲线为两族不同的实曲线,  $\varphi_1(x, y) = c$  和  $\varphi_2(x, y) = c$ 。假设  $\varphi_{1x}, \varphi_{1y}, \varphi_{2x}, \varphi_{2y}$  均不同时为零, 则变换

$$\xi = \varphi_1(x, y), \eta = \varphi_2(x, y) \quad (1.10)$$

是可逆变换, 这是因为

$$\frac{\varphi_{1x}}{\varphi_{1y}} = -\frac{dy_1}{dx} = -\frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \quad \frac{\varphi_{2x}}{\varphi_{2y}} = -\frac{dy_2}{dx} = -\frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}},$$

而  $\Delta > 0$ , 因此  $\frac{\varphi_{1x}}{\varphi_{1y}} \neq \frac{\varphi_{2x}}{\varphi_{2y}}$ , 即变换(1.10)导出的行列式  $\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x, y)} \neq 0$ 。此时  $\bar{a}_{11}, \bar{a}_{22}$  都为零。然而, 二阶方程不能经过可逆变换变成一阶方程, 故  $\bar{a}_{12} \neq 0$ 。于是, 方程(1.4)化为

$$u_{\xi\eta} = Au_{\xi} + Bu_{\eta} + Cu + D, \quad (\text{双曲型方程的第一标准形式}) \quad (1.11)$$

其中  $A, B, C, D$  为  $\xi, \eta$  的函数。



## §1 二阶线性方程的分类

## 2. 两个自变量的二阶线性方程的化简

再作自变量的变换

$$\xi = \frac{1}{2}(s+t), \eta = \frac{1}{2}(s-t),$$

则方程(1.1)进一步化为

$$u_{ss} - u_{tt} = A_1 u_s + B_1 u_t + C_1 u + D_1. \quad (\text{双曲型方程的第二标准形式}) \quad (1.12)$$

(2) 在点  $(x_0, y_0)$  附近  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ , 且  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  不全为零。此时(1.7)化为完全平方

$$(\sqrt{a_{11}}\varphi_x + \sqrt{a_{22}}\varphi_y)^2 = 0,$$

故特征线只有一族, 记为  $\varphi_1(x, y) = c$ 。令  $\xi = \varphi_1(x, y)$ , 则  $\bar{a}_{11} = 0$ 。又由于  $\Delta = 0$ ,

$$\begin{aligned} \bar{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_1\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y \\ &= (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0 \end{aligned}$$

因此  $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{12} = 0, \bar{a}_{22} \neq 0$ 。任取一函数  $\eta = \varphi_2(x, y)$  (最简单的形式是  $\eta(x, y) = x$ ), 使  $\varphi_1, \varphi_2$  函数无关, 则通过变换(1.10), 方程(1.1)就化为

$$\bar{a}_{22}u_{\eta\eta} = Au_{\xi} + Bu_{\eta} + Cu + D.$$



## §1 二阶线性方程的分类

## 2. 两个自变量的二阶线性方程的化简

两端同除  $\bar{a}_{22}$ , 得到

$$u_{\eta\eta} = A_1 u_\xi + B_1 u_\eta + C_1 u + D_1. \quad (1.13)$$

再作未知函数的线性变换

$$v = u e^{-\frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\eta} B_1(\xi, \tau) d\tau} \left( \Rightarrow u = v e^{\frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\eta} B_1(\xi, \tau) d\tau} \right)$$

就得到关于  $v$  的方程

$$v_{\eta\eta} = A_2 v_\xi + C_2 v + D_2. \quad (\text{抛物型方程的标准形式}) \quad (1.14)$$

(3) 在点  $(x_0, y_0)$  附近  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ . 此时没有实的特征线, 方程(1.8)的通积分只能是复函数。假设

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y) = c$$

是(1.9a)的一个通积分, 则  $\varphi_x, \varphi_y$  不同时为零且

$$-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \Rightarrow a_{11}\varphi_x = -\left(a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)\varphi_y.$$



## §1 二阶线性方程的分类

## 2. 两个自变量的二阶线性方程的化简

于是  $z = \varphi(x, y)$  满足

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0.$$

作变换

$$\xi = \operatorname{Re} \varphi(x, y) = \varphi_1(x, y), \quad (1.15)$$

$$\eta = \operatorname{Im} \varphi(x, y) = \varphi_2(x, y).$$

可以证明  $\varphi_1(x, y)$  和  $\varphi_2(x, y)$  是函数无关的。事实上, 因为  $\varphi(x, y) = c$  满足(1.9a), 故

$$a_{11}\varphi_x = - \left( a_{12} + i\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \right) \varphi_y \quad (1.16)$$

把实部及虚部分开, 得到

$$\begin{cases} a_{11}\xi_x = -a_{12}\xi_y + \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\eta_y \\ a_{11}\eta_x = -a_{12}\eta_y - \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\xi_y \end{cases} \quad (1.16')$$



## §1 二阶线性方程的分类

## 2. 两个自变量的二阶线性方程的化简

由于  $a_{11} \neq 0$  (否则  $\Delta$  不会小于零), 成立

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{a_{11}} (\xi_y^2 + \eta_y^2) \neq 0$$

否则  $\xi_y = \eta_y = 0$ , 再由 (1.16') 推出  $\xi_x = \eta_x = 0$ , 从而  $\varphi_x = \varphi_y = 0$ , 与假设不符。因此  $\varphi_1, \varphi_2$  函数无关。

由于  $\xi + i\eta$  满足(1.7), 代入将实部及虚部分开, 得到

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2, \\ a_{11}\xi_x\xi_y + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y &= 0. \end{aligned}$$

于是(1.1)化为

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = Au_{\xi} + Bu_{\eta} + Cu + D. \quad (\text{椭圆型方程的标准形式}) \quad (1.17)$$



## §1 二阶线性方程的分类

## 3. 方程的分类

我们看到, 两个自变量的二阶线性方程通过自变量的可逆变换能够化成哪种标准形, 要看二次型

$$Q(l, m) = a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2$$

的代数性质如何来定, 或者说, 由  $l, m$  平面上的二次曲线  $Q(l, m) = 1$  的性质决定。由于方程  $Q(l, m) = 1$  所确定的二次曲线可以是一个椭圆、一个双曲线或者一个抛物线, 故定义方程(1.1)在一点的类型如下:

若方程(1.1)中二阶偏导数项的系数  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  在区域  $\Omega$  中某点  $(x_0, y_0)$  满足

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0 \Rightarrow \text{方程在点 } (x_0, y_0) \text{ 为双曲型的;}$$

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 \Rightarrow \text{方程在点 } (x_0, y_0) \text{ 为抛物型的;}$$

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0 \Rightarrow \text{方程在点 } (x_0, y_0) \text{ 为椭圆型的。}$$

如果方程在一区域  $\Omega$  中的每点均为双曲型、抛物型或者椭圆型, 就称方程在区域  $\Omega$  中是双曲型、抛物型或椭圆型的。



## §1 二阶线性方程的分类

## 3. 方程的分类

如果点  $(x_0, y_0)$  为方程(1.1)的双曲型点或椭圆型点, 则一定存在该点的一个邻域, 使方程在这邻域内是双曲型或椭圆型, 因此在该点附近将方程化为标准形式。但是如点  $(x_0, y_0)$  为抛物型点, 就不一定存在一个邻域, 使方程在这邻域内是抛物型的, 因此并不能保证在该点附近可化成抛物型方程的标准形式。于是, 由此可看出

弦振动方程  $\implies$  双曲型的  $\implies$  描述波的传播现象, 对时间有可逆性;

一维热传导方程  $\implies$  抛物型的  $\implies$  反映了热的传导、物质的扩散等不可逆现象;

二维调和方程  $\implies$  椭圆型的  $\implies$  描述平衡或定常的状态。

有时候, 某些方程在区域  $\Omega$  的一部分是双曲型的, 另一部分是椭圆型的, 而在它们的分界线上是抛物型的。这样的方程在区域  $\Omega$  中称为混合型的。例如特里科米 (Tricomi) 方程

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.18)$$

在上半平面  $y > 0$  是椭圆型的, 而在下半平面  $y < 0$  是双曲型的。当所考察的区域  $\Omega$  包含轴  $y = 0$  上的某些线段时, 这方程在  $\Omega$  中称为混合型的。在研究空气动力学中的跨音速流问题时, 通常遇到混合型方程。



## §1 二阶线性方程的分类

## 4. 例

例 1 弦振动方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0.$$

则该弦振动方程的特征方程为

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0,$$

特征线族为

$$x + at = c \quad \text{及} \quad x - at = c.$$

令  $x_1 = \frac{x}{a}$ , 就化成标准形式(1.12)。再作变换  $\xi = x + at, \eta = x - at$ , 即化成标准形式(1.11)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

利用这种标准形式, 如第一章第二小节的行波法, 可求得它的通解

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(x + at) + \psi(x - at), \quad (1.19)$$

其中  $\varphi, \psi$  是两个任意的二阶连续可导函数。



## §1 二阶线性方程的分类

## 4. 例

例 2 特里科米方程

特征方程为

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

在椭圆型区域  $y > 0$  内, 化为

$$y dy^2 + dx^2 = 0.$$

故得通积分

$$dx \pm i\sqrt{y}dy = 0,$$

作变换

$$x \pm i\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = c.$$

原方程化为

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \quad (1.20)$$

在双曲型区域  $y < 0$  内化为

$$dx \pm \sqrt{-y}dy = 0,$$

故得通积分

$$x \pm \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = c.$$

作变换

$$\xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}},$$

原方程化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (1.21)$$



## §1 二阶线性方程的分类

## 5\*. 多个自变量的方程的分类

多个自变量的二阶线性偏微分方程的一般形式

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \quad (1.22)$$

其中  $a_{ij}, b_i, c$  及  $f$  是  $n$  维空间  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  中某区域  $\Omega$  上的适当光滑的函数, 总可取  $a_{ij} = a_{ji}$ 。

两个自变量方程的分类: 二次型为  $A(\lambda) = a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2$ ,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -\Delta \begin{cases} > 0 & \text{椭圆型} \Leftrightarrow A(\lambda) \text{ 正定 } (a_{11} > 0) \text{ 或负定 } (a_{11} < 0) \\ = 0 & \text{抛物型} \Leftrightarrow A(\lambda) \text{ 退化} \\ < 0 & \text{双曲型} \Leftrightarrow A(\lambda) \text{ 既不退化、又不正定或负定} \end{cases}$$

这对应于二次型  $A(\lambda)$  的特征根, 即方程

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1.23)$$

的根为同号、有零根及异号的情形。



## §1 二阶线性方程的分类

## 5\*. 多个自变量的方程的分类

多个自变量方程的分类：二次型为

$$A(\lambda) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j. \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \xrightarrow[\text{二次型}]{\text{拉普拉斯方程}} A(\lambda) = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 (\text{正定}) \xrightarrow[\text{特征根}]{\text{对应矩阵}} \text{同号}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) \xrightarrow[\text{二次型}]{\text{波动方程}} A(\lambda) = \lambda_0^2 - a^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2) (\text{不定}) \xrightarrow[\text{特征根}]{\text{对应矩阵}} n \text{ 同 } 1 \text{ 异}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) \xrightarrow[\text{二次型}]{\text{热传导方程}} A(\lambda) = -a^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2) (\text{退化}) \xrightarrow[\text{特征根}]{\text{对应矩阵}} \text{有一特征根为零}$$



## §1 二阶线性方程的分类

## 5\*. 多个自变量的方程的分类

由此引入定义：设方程(1.22)在某点  $P(x_1^0, \dots, x_n^0)$  所对应二次型

$$A(\lambda) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(P)\lambda_i\lambda_j$$

$A(\lambda)$  正定或负定，即矩阵  $(a_{ij})$  的特征根符号完全相同  $\Rightarrow$  方程在点  $P$  为椭圆型

$A(\lambda)$  退化，即矩阵  $(a_{ij})$  的特征根至少有一个为零  $\Rightarrow$  方程在点  $P$  为抛物型

$A(\lambda)$  非退化非正（负）定，但矩阵  $(a_{ij})$  的特征根有  $n-1$  个同号  $\Rightarrow$  方程在点  $P$  为双曲型

$A(\lambda)$  非退化非正（负）定，又不为双曲型且矩阵  $(a_{ij})$  至少有两正和两负的特征根  $\Rightarrow$  方程在点  $P$  为超双曲型



## §2 二阶线性方程的特征理论

## 1. 特征概念

**弱间断解:** 对具有  $n$  个自变量的二阶方程, 若有一函数  $u$  在某个  $n$  维区域内有一阶连续偏导数, 且在此区域内除了一个  $(n-1)$  维光滑曲面  $S$  ( $n=2$  时它是曲线) 外, 有二阶连续偏导数, 并处处满足方程, 同时  $u$  的二阶偏导数在  $S$  上的左右极限均存在 (具有第一类间断), 那么称  $u$  为方程的弱间断解。例如, 波传播的波阵面就是弱间断面。

以弦振动方程为例。该方程的传播波解为  $f_1(x-at)$  与  $f_2(x+at)$ 。以右传播波为例, 它在  $x-at=C$  的特征线上为常数。因此, 如果一右传播波  $u=f(x-at)$  在初始  $t=0$  时取为

$$\varphi(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)^2, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

则

$$\varphi'(x) = \begin{cases} 4(x^2 - 1)x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$



## §2 二阶线性方程的特征理论

## 1. 特征概念

$$\varphi''(x) = \begin{cases} 12x^2 - 4, & |x| < 1 \\ 8, & x = 1 \\ 0, & x = -1 \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

于是函数  $\varphi(x)$  在  $x = \pm 1$  处一阶导数连续、二阶导数有间断。相应的右传播波形式解为

$$u(x, t) = \begin{cases} [(x - at)^2 - 1]^2, & |x - at| \leq 1, \\ 0, & |x - at| > 1, \end{cases}$$

它在  $x - at = \pm 1$  处有弱间断。上述解有物理意义,  $x - at = 1$  和  $x + at = 1$  这两条弱间断线恰好表示波的前阵面和后阵面。

这个例子说明了弱间断线恰好是特征线, 或者说弱间断沿特征线发生, 弱间断沿特征线传播, 等等。这个事实并非巧合, 而是反映了一个很重要的事实。下面我们将对一般的二阶线性方程来导出一个曲面(曲线)可能作为弱间断曲面(曲线)的条件, 并将满足此条件的曲面(曲线)称为**特征曲面(特征线)**, 或简称为**特征**。



## §2 二阶线性方程的特征理论

## 2. 特征方程

在  $n$  维空间  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的某区域  $\Omega$  上, 考察下面一般的二阶线性方程

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \quad (2.1)$$

其中  $a_{ij}, b_i, c$  及  $f$  为  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的已知连续函数。

在区域  $\Omega$  中给定一个超曲面

$$S: \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (2.2)$$

其中  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  具有二阶连续偏导数, 且  $\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 \neq 0$  恒成立。问, 在什么条件下超曲面  $S$  可以成为方程(2.1)的某个弱间断面? 改写提法, 如果在  $\varphi = 0$  上给定函数  $u$  及其所有一阶偏导数的值, 能不能利用这些值以及方程(2.1)来唯一地决定  $u$  的二阶偏导数? 显然

能唯一地在  $S$  上决定  $u$  的二阶偏导数  $\iff \varphi = 0$  就不是某个弱间断解  $u$  的弱间断曲面。

(1) 考察  $S$  为坐标超平面  $x_n = 0$ 。若在  $S$  上  $u$  及其一阶偏导数  $\frac{\partial u}{\partial x_i} (i = 1, \dots, n)$  的值为已知的  $(x_1, \dots, x_{n-1})$  的函数, 则显然二阶偏导数  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, x_{n-1})$  在  $S$  上的值可以通过将  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  对  $x_j$  求导而唯一决定。下面看  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$  在  $S$  上的值。



## §2 二阶线性方程的特征理论

## 2. 特征方程

由方程(2.1)知, 若  $a_{nn}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \neq 0$ , 就可以在  $S$  上唯一地决定出  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$  的值. 若成立

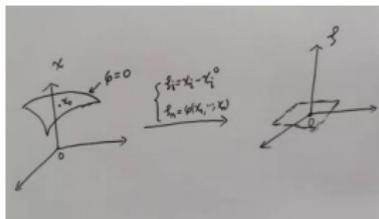
$$a_{nn}|_S = a_{nn}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0, \quad (2.3)$$

就不能在  $S$  上唯一地决定  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$  的值. 因此, (2.3)就是坐标超平面  $x_n = 0$  可能成为方程(2.1)的某个若间断解的若间断面的条件.

(2) 回到一般的情形(2.2). 令  $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  是  $S$  上任一点. 因假设有  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right)\Big|_{x=x_0} \neq 0$ , 于是至少存在某个  $j (1 \leq j \leq n)$ , 使  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\Big|_{x=x_0} \neq 0$ . 不妨设  $j = n$ , 令

$$\begin{cases} \xi_i = x_i - x_i^0 \quad (i = 1, \dots, n-1), \\ \xi_n = \varphi(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad (2.4)$$

则这个自变量变换, 将  $x_0$  变成  $\xi$  坐标中的原点, 将  $x_0$  在  $S$  上的一个邻域变换到  $\xi$  坐标中原点在  $\xi_n = 0$  上的一个邻域,



## §2 二阶线性方程的特征理论

## 2. 特征方程

在  $x_0$  点的雅可比行列式为

$$\left| \frac{D(\xi_1, \dots, \xi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{n \times n} \right| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \Big|_{x=x_0} \right| \neq 0,$$

因而它是可逆变换。在坐标变换(2.4)下, 有

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} + \text{只包含 } u \text{ 的一阶偏导数的项。} \end{cases}$$

此时  $u(x_1, \dots, x_n) = u(\xi_1 + x_1^0, \dots, \xi_{n-1} + x_{n-1}^0, x_n) \stackrel{\text{约定}}{=} u(\xi_1, \dots, \xi_n)$ , 其中  $x_n$  是由

$\xi_n = \varphi(\xi_1 + x_1^0, \dots, \xi_{n-1} + x_{n-1}^0, x_n)$  解出来代入上式的。于是方程(2.1)就化为

$$\sum_{k,l=1}^n \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} + u \text{ 和 } u \text{ 的一阶偏导数} = \sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \dots = f, \quad (2.5)$$



## §2 二阶线性方程的特征理论

## 2. 特征方程

其中

$$\tilde{a}_{kl} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}. \quad (2.6)$$

由(2.3)知,  $x_0$  在  $S$  上的邻域可能成为(2.1)的某个弱间断解的弱间断面的必要条件是

$$\tilde{a}_{kl} = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 0) = 0,$$

即

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \Big|_{\xi_n=0} = 0.$$

再利用变换(2.4)的最后一式, 上式又可写为

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \Big|_{\xi_n=0} = 0. \quad (2.7)$$

就得到: 在  $S$  上成立(2.7)式是  $S$  可能成为方程(2.1)的弱间断解的弱间断面的必要条件。如果在曲面  $S$  上成立(2.7)式,

就称  $S$  为方程(2.1)的**特征曲面**。



## §2 二阶线性方程的特征理论

## 2. 特征方程

对一固定的点  $x$ ，如果过该点的方向  $\mathbf{l}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  满足特征方程

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \alpha_i \alpha_j = 0. \quad (2.8)$$

则称  $\mathbf{l}$  为此点  $x$  的**特征方向**。由于  $(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n})$  表示超曲面  $\varphi = 0$  的法向，所以特征曲面也就是每点的法向为特征方向的曲面。有是也称过一点以特征方向为法线方向的  $n-1$  维超平面为该点的**特征平面**，称过这一点的所有由特征平面包络所成的锥面为过此点的**特征锥面**。



## §2 二阶线性方程的特征理论

## 3. 例

假设

$$\sum \alpha_i^2 = 1, \quad (2.9)$$

其中  $\alpha_i$  为特征方向的方向余弦。

例 1 
$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f,$$

特征方程为 
$$a_{11}\alpha_1^2 + 2a_{12}\alpha_1\alpha_2 + a_{22}\alpha_2^2 = 0.$$

满足上述关系式的方向  $(\alpha_1, \alpha_2)$  为特征方向。该方程的特征线  $\varphi(x, y) = 0$  满足

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0.$$

例 2 拉普拉斯方程

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

则

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

特征方程:  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\alpha_i\alpha_j = \sum_i \alpha_i^2 = 0$ , 与  $\sum \alpha_i^2 = 1$  矛盾, 因此拉普拉斯方程没有实的特征方向。



## §2 二阶线性方程的特征理论

## 3. 例

例 3  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ , 其特征方程为

$$\alpha_0^2 = a^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2).$$

由(2.9)式知

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1.$$

因此

$$\frac{\alpha_0^2}{1 - \alpha_0^2} = a^2 \quad \text{或} \quad \alpha_0 = \pm \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

因此过任一点的特征方向与  $t$  轴的夹角为  $\arctan \frac{1}{a}$ , 其方向余弦为

$$\left( \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + a^2}}, \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + a^2}} \right),$$

其中  $\theta$  是参数。这些特征方向的全体也构成一个锥面。



## §2 二阶线性方程的特征理论

## 3. 例

过一点  $(x_0, y_0, t_0)$  作以此点的特征方向为法线方向的平面族

$$a(t - t_0) + \cos \theta(x - x_0) + \sin \theta(y - y_0) = 0 \quad (\theta \text{ 为参数}).$$

将此平面族的方程关于  $\theta$  求导可得

$$-\sin \theta(x - x_0) + \cos \theta(y - y_0) = 0.$$

结合上面两个式子

$$\begin{cases} [a(t - t_0)]^2 = [-\cos \theta(x - x_0) - \sin \theta(y - y_0)]^2 = [\cos \theta(x - x_0) + \sin \theta(y - y_0)]^2, \\ 0 = [-\sin \theta(x - x_0) + \cos \theta(y - y_0)]^2, \end{cases}$$

可得

$$\begin{aligned} a^2(t - t_0)^2 &= \cos^2 \theta((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) + \sin^2 \theta((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) \\ &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, \end{aligned}$$

它就是过点  $(x_0, y_0, t_0)$  的特征锥面。



## §2 二阶线性方程的特征理论

## 3. 例

例 4 热传导方程  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$ , 其特征方程为

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0.$$

又由(2.9)式知

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1.$$

故  $\alpha_0^2 = 1$ 。因此特征曲面为超平面  $t = \text{const}$ 。

注 热传导方程的柯西问题的初始条件恰好给在特征面  $t = 0$  上, 但对波动方程的柯西问题来说, 其初始平面  $t = 0$  为非特征面。



## §3 三类方程的比较

## 1. 线性方程的叠加原理

算子  $L$  线性, 是指满足可加性条件

$$L[C_1u_1 + C_2u_2] = C_1L[u_1] + C_2L[u_2], \quad (3.1)$$

其中  $C_1, C_2$  是任意给定的常数。

算子  $L$  是线性微分算子, 则方程  $Lu = f$  称为线性微分方程。特别地, 当  $f \equiv 0$  时方程  $Lu = 0$  称为齐次的。

叠加原理 I (有限叠加) 设  $u_i$  满足线性方程 (或线性定解条件)

$$Lu_i = f_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

则称它们的线性组合  $u = \sum_{i=1}^n C_i u_i$  (其中  $C_1, \dots, C_n$  为任意给定的常数) 必满足方程 (或定解条件)

$$Lu = \sum_{i=1}^n C_i f_i.$$

特别地, 当  $u_i (i = 1, \dots, n)$  满足齐次方程 (或齐次定解条件) 时,  $u$  也满足此齐次方程 (或齐次定解条件)。



## §3 三类方程的比较

## 1. 线性方程的叠加原理

叠加原理 II (无穷可列项叠加) 设  $u_i$  满足线性方程 (或线性定解条件)

$$Lu_i = f_i \quad (i = 1, 2, \dots),$$

又假设它们的线性组合  $u = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i$  有意义且微分与求和能交换顺序, 那么  $u$  满足方程 (或定解条件)

$$Lu = \sum_{i=1}^{\infty} C_i f_i.$$

特别, 当  $u_i (i = 1, 2, \dots)$  满足齐次方程 (或齐次定解条件) 时,  $u$  也满足此齐次方程 (或齐次定解条件)。

叠加原理 III (不可列, 积分形式) 设  $u(M, M_0)$  满足线性方程 (或线性定解条件)

$$Lu = f(M, M_0),$$

其中  $M_0$  为参数。又假设  $U(M) = \int u(M, M_0) dM_0$  有意义与微分与积分能交换顺序, 那么  $U(M)$  满足方程 (或定解条件)

$$LU = \int f(M, M_0) dM_0.$$

特别, 当  $u$  满足齐次方程 (或齐次定解条件) 时,  $U$  也满足此齐次方程 (或齐次定解条件)。



## §3 三类方程的比较

## 1. 线性方程的叠加原理

注 1 本文第一章介绍的分变量法和齐次化原理、第二章介绍的傅里叶变换法与第三章介绍的格林函数法，都利用了叠加原理。

注 2 对非线性方程（或者是线性方程具有非线性定解条件）的情形，叠加原理不成立。



## §3 三类方程的比较

## 2. 解的性质的比较

## (1) 解的光滑性

**一维波动方程 (弦振动方程):** 从达朗贝尔公式知

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi,$$

如初始条件  $u(0, x) = \varphi(x)$ ,  $u_t(0, x) = \psi(x)$  中  $\varphi(x) \in C^2$ ,  $\psi(x) \in C^1$  且  $\varphi(x)$  的三阶导数不存在, 则解的三阶偏导数也不存在。**高维波动方程**, 从泊松公式也可看到类似的事实。即波动方程解的光滑性一般不会超过初始条件的光滑性。双曲型方程描写的是波的传播现象, 在波的传播中, 可以将一定的弱间断性保留下来, 因而其解就可能不很光滑。

**热传导方程:** 具有能迅速地趋于平衡的特点, 解的表示式为

$$u(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi,$$

只要初始条件  $\varphi(x)$  连续有界, 解  $u(t, x)$  在  $t > 0$  时无穷可微; 当  $t$  固定时, 解关于空间变量是解析函数。

**拉普拉斯方程:** 描述平衡与稳定状态, 任何连续解在解的定义域内都是解析函数。

**注:** 方程带有非齐次项或者是变系数的时候, 解的光滑性还要受到系数与非齐次项的光滑性的影响。



## §3 三类方程的比较

## 2. 解的性质的比较

## (2) 解的极值性质

**拉普拉斯方程:** 它的解反映已处于稳定状态的物理量, 因而当解不是常数时, 在内部不能取极值; 同时, 其边界的各部分原则上没有本质的区别, 极值可能在边界上任一处达到。

**热传导方程:** 热量的传播速度很快, 初始时如内部有极值, 那么在  $t > 0$  时内部极值迅速消失, 因而区域内的最大值不能超过区域抛物边界上的最大值。

**波动方程:** 波的传播可以相互叠加, 扰动增大的现象往往会在叠加时出现, 因此通常没有极值性质。

## (3) 影响区域与依赖区域

**波动方程:** 波传播现象具有一定的传播速度, 一点的影响区域为以该点的为顶点向上作出的特征锥内部 (三维时为锥的表面), 决定特征锥斜度的  $\alpha$  就是波的传播速度; 一点的依赖区域是以该点为顶点向下作出的特征锥与平面  $t = 0$  所交的圆 (或球面)。

**热传导方程:** 热传导现象进性的非常迅速, 一点的影响区域是该点以上的整个上半平面 (无限区域); 一点的依赖区间是整个直线 (平面)  $t = 0$ 。

**拉普拉斯方程:** 它是定常状态或平衡状态, 没有传播速度。而根据调和函数的解析性定理知, 在曲面  $\Gamma$  上任意小的部分  $\Gamma_0$  给出边界值, 它的影响区域必是全部区域  $\Omega$ 。



## §3 三类方程的比较

## 2. 解的性质的比较

## (4) 关于时间的反演

一个物理状态，其变化过程为可逆的是指：

$$t_1 : \text{状态 } A \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{按某种规律变化}} \\ \xrightarrow{\text{沿相反的变化过程}} \end{array} t_2 : \text{状态 } B.$$

物理状态的可逆过程在数学上反映为所归结出来的方程关于时间变量  $t$  是否是对称的，即以  $-t$  代替  $t$  后方程是否不变。

**拉普拉斯方程：**没有出现时间变量，因此不会产生关于时间的反演问题。

**波动方程：**波的传播是一个可逆过程。事实上，以  $u(x, t)$  表示描写波的传播过程，它满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$t = 0 : u(x, 0); \quad t = t_0 : u(x, t_0)$ 。考察从  $t_0$  是状态  $u(x, t_0)$  沿原来变化过程的逆向过程能否回到  $t = 0$  时的状态  $u(x, 0)$ ，只要在  $t \leq t_0$  时求解下面的定解问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=t_0} = u(x, t_0), \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = u_t(x, t_0), \end{cases}$$

并看它在  $0 \leq t \leq t_0$  时的状态是否与原来状态  $u(x, t)$  相符就行了。

(3.2)



## §3 三类方程的比较

## 2. 解的性质的比较

令  $t' = t_0 - t$ , 则  $t = t_0 - t'$ ,  $u(x, t) = u(x, t_0 - t') = \tilde{u}(x, t')$ . 于是

$$\frac{\partial \tilde{u}(x, t')}{\partial t'} = \frac{\partial u(x, t_0 - t')}{\partial t'} = -\frac{\partial u(x, t_0 - t')}{\partial t} = -\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \dots$$

则上面的问题就化为在  $t' \geq 0$  时求解

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t'^2} = a^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}, \\ \tilde{u}|_{t'=0} = u(x, t_0), \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t'} \Big|_{t'=0} = -u_t(x, t_0), \end{cases} \quad (3.3)$$

从而, 上述问题的解为

$$\tilde{u}(x, t') = u(x, t_0 - t') = u(x, t). \quad (3.4)$$

因此, 波的传播状态从  $t' = 0 (t = t_0)$  变化到  $t' = t_0 (t = 0)$  的过程  $\tilde{u}(x, t')$  相当于  $u(x, t)$  从  $t = t_0$  变化到  $t = 0$  的过程, 即  $\tilde{u}(x, t')$  是  $u(x, t)$  的逆变化过程。

**热传导方程:** 热传导现象不是可逆的过程。事实上, 以  $u(x, t)$  表示描写热传导过程的函数, 它满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$



## §3 三类方程的比较

## 2. 解的性质的比较

那么  $\tilde{u}(x, t') = u(x, t_0 - t')$  满足

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = 0,$$

与原来的热传导方程不同。与此相应的是对热传导方程在区域  $t < 0$  内求解柯西问题通常是不适定的。在物理学中这是明显的，因为热传导方程所描述的物理现象如传导、扩散等都是由高到低、由密到稀的单向变化，这种过程是不可逆的。

## (5) 解的渐近性态

**拉普拉斯方程：**与时间无关，因此没有渐近性态。

**波动方程：**齐次第一类或第二类初边值问题，如一维情况第一类初边值问题解的表达式

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + B_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x$$

含有  $\cos \frac{k\pi a}{l} t$  和  $\sin \frac{k\pi a}{l} t$  的三角级数，解并不衰减，但是对  $n \geq 2$  个空间变量的初值问题，如三维情况解的表达式为

$$u(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}^M} \varphi dS \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}^M} \psi dS,$$

当初值具有紧支集时， $t \rightarrow \infty$ ，解以  $t^{-1}$  的衰减率趋于零。事实上， $n \geq 2$  个空间变量时，解及其偏导数会以  $t^{-\frac{n-1}{2}}$  的衰减率趋于零。



## §3 三类方程的比较

## 2. 解的性质的比较

**热传导方程:** 齐次第一类或第二类初边值问题, 如一维情况第一类初边值问题解的表达式为

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-a^2 \lambda_k t} \sin \sqrt{\lambda_k} x (\leq C e^{-a^2 \lambda_1 t}),$$

解以指数衰减率趋于它的平衡状态, 而对初值问题,  $n \geq 1$  个空间变量解的表达式为

$$u(x, t) = \left( \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi,$$

解以  $t^{-\frac{n}{2}}$  衰减率趋于零。



## §3 三类方程的比较

## 3. 定解问题提法的比较

**椭圆型方程:** 只有边界条件没有初始条件, 故一般不提柯西问题与初边值问题。

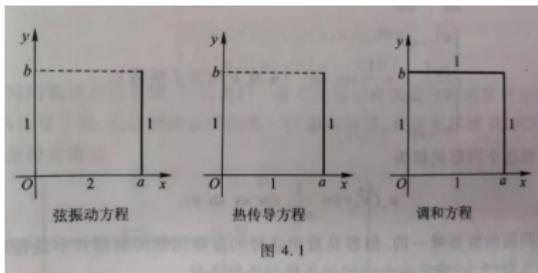
**抛物型方程:** 初始条件有一个, 也可以有边界条件, 可以提柯西问题与初边值问题。

**双曲型方程:** 初始条件有两个, 也可以有边界条件, 也可以提柯西问题与初边值问题。

如弦振动方程、一个空间变量的热传导法方程与两个自变量的调和方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0,\end{aligned}\tag{3.5}$$

在  $Oxy$  平面区域  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$  上的一些定解问题中定解条件的提法可用图 4.1 表示



## §3 三类方程的比较

## 3. 定解问题提法的比较

问题: 是否可以对调和方程提柯西问题与初边值问题, 对弦振动方程与热传导方程提狄利克雷问题?

将初始资料  $\varphi^{(i)} (i = 1, \dots, N)$  看作某个函数空间  $\Phi$  中的元素, 问题的解  $u$  也看成另一个函数空间  $U$  中的元素. 设函数空间  $\Phi$  及  $U$  都可按某种方式规定一个距离, 而形成一个距离空间. 稳定性的要求: 当  $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$  的距离  $\rho(\varphi_1, \varphi_2)$  充分小时, 相应的解  $u_1, u_2 \in U$  的距离  $\rho(u_1, u_2)$  也充分小. 函数空间通常取  $C^0, C^k, H^k$ , 等等. 这些空间的距离分别定义为

$$\max |\varphi_1 - \varphi_2|, \quad \max_{1 \leq i \leq k} |D^i \varphi_1 - D^i \varphi_2|, \quad \left[ \int_{\Omega} \sum_{0 \leq i \leq k} |D^i \varphi_1 - D^i \varphi_2|^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}.$$

第一章波动方程柯西问题解的稳定性, 取  $\Phi$  中距离为  $\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H^1(\Omega)} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^2(\Omega)}$ , 而取  $U$  中距离为  $\|u_1 - u_2\|_{L^2(K)}$ . 在第二章及第三章讨论热传导方程柯西问题、初边值问题解的稳定性以及拉普拉斯方程狄利克雷问题解的稳定性时,  $\Phi, U$  的距离均按连续模来度量.

不稳定的定解问题: **反例 1:** 将  $y$  看出时间变量, 考察拉普拉斯方程的初边值问题:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, y > 0, \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} u|_{y=0} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{1}{n^k} \sin nx (n, k \text{ 均为正整数}), \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$



## §3 三类方程的比较

## 3. 定解问题提法的比较

分离变量法求得这个问题的解为

$$u_n(x, y) = \frac{1}{n^{k+1}} \sin nx \sin ny.$$

可以证明定解问题的解是唯一的, 但不是稳定的. 事实上, 方程(3.6)满足齐次初始条件与边界条件

$$u|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0 \quad (3.8)$$

的解  $u_0(x, y) \equiv 0$ . 两者相比较, 它们满足相同的边界条件, 且当  $n \rightarrow \infty$  时,  $u_n$  所满足的初始条件本身以及它的直到  $k-1$  阶导数都一致地趋于  $u_0$  所满足的齐次初始条件, 但对应的解之差

$$u_n(x, y) - u_0(x, y) = \frac{1}{n^{k+1}} \sin nx \sin ny - 0 = \frac{1}{n^{k+1}} \sin nx \sin ny \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

不仅如此, 令  $\Omega = (0, \pi) \times (0, y)$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\|u_n - u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_0^y \int_0^\pi \left( \frac{1}{n^{k+1}} \sin nx \sin ny \right)^2 dx dy = \frac{\pi}{8n^{2k+3}} (\sinh 2ny - 2ny) \rightarrow 0.$$

类似的例子可以说明拉普拉斯方程柯西问题的不稳定性.

**反例 2:** 弦振动方程的狄利克雷问题.

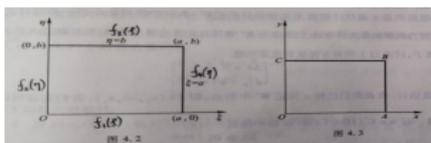
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad (3.9)$$



## §3 三类方程的比较

## 3. 定解问题提法的比较

在由  $\xi = a, \eta = b$ ,  $\xi$  轴和  $\eta$  轴围成的矩形区域上考虑狄利克雷问题 (图 4.2)



所给边界条件为

$$\begin{cases} u(\xi, 0) = f_1(\xi) & (0 \leq \xi \leq a), \\ u(0, \eta) = f_2(\eta) & (0 \leq \eta \leq b), \\ u(\xi, b) = f_3(\xi) & (0 \leq \xi \leq a), \\ u(a, \eta) = f_4(\eta) & (0 \leq \eta \leq b). \end{cases} \quad (3.10)$$

为使边界条件连续, 还需  $f_1(0) = f_2(0)$ ,  $f_1(a) = f_4(0)$ ,  $f_3(0) = f_2(b)$ ,  $f_3(a) = f_4(b)$

等相容性条件按。方程(3.9)的通解为

$$u = f(\xi) + g(\eta),$$



## §3 三类方程的比较

## 3. 定解问题提法的比较

由(3.10)的前两个条件知

$$u(\xi, 0) = f_1(\xi) = f(\xi) + g(0),$$

$$u(0, \eta) = f_2(\eta) = f(0) + g(\eta).$$

所以

$$u(0, 0) = f_1(0) = f_2(0) = f(0) + g(0),$$

$$f(\xi) = f_1(\xi) - g(0), \quad g(\eta) = f_2(\eta) - f(0).$$

从而解的表达式为

$$u = f_1(\xi) + f_2(\eta) - f(0) - g(0) = f_1(\xi) + f_2(\eta) - f_1(0) = f_1(\xi) + f_2(\eta) - f_2(0).$$

所以  $f_3, f_4$  必须满足

$$f_3(\xi) = f_1(\xi) + f_2(b) - f_1(0), \quad f_4(\eta) = f_1(a) + f_2(\eta) - f_1(0),$$

除此之外方程(3.9)均无解。因而我们一般不能提弦振动方程的狄利克雷问题。

同样，对热传导方程，由前面所证明的唯一性定理知，在矩形区域  $OABC$ (图4.3) 上，狄利克雷问题一般也无解。



## §4 先验估计

## 1. 椭圆型方程解的最大模估计

常用的先验估计有：最大模估计、均方估计。先验估计一般可以得到相应定解问题的存在性与唯一性。

设  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  为有界区域，具有光滑边界  $\Gamma$ 。讨论  $\Omega$  上调和方程的狄利克雷问题的最大模估计

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), \\ u|_{\Gamma} = \varphi(x), \end{cases} \quad (4.1)$$

## 定理 4.1

(弱极值原理) 设  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  在  $\Omega$  中满足

$$\Delta u \geq 0, \quad (4.2)$$

则成立

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\Gamma} u. \quad (4.3)$$

**证** 因  $\Omega$  是有界区域，且  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ，故  $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\Omega} u$ 。若(4.2)为严格不等式，设  $u$  在  $\Omega$  内部某点  $P$  取到最大值，则对一切  $i$  都有  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(P) \leq 0$ ，从而  $\Delta u(P) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(P) \leq 0$  与  $\Delta u > 0$  矛盾。若(4.2)为非严格不等式，对任意给定的  $\varepsilon > 0$ ，令  $w = u_\varepsilon e^{x_1}$ ，则

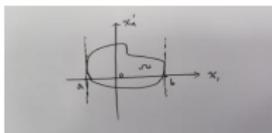
$$\Delta w = \Delta u + \varepsilon \Delta(e^{x_1}) = \Delta u + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(e^{x_1}) = \Delta u + \varepsilon e^{x_1} > 0,$$



## §4 先验估计

## 1. 椭圆型方程解的最大模估计

于是最大值只能在边界上达到, 又因  $\Omega$  是有界区域, 则对  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$  的分量  $x_1$  必是可控的, 即必存在  $a, b \in \mathbb{R}$  使得  $a \leq x_1 \leq b$ , 如下图



从而 
$$\max_{\Omega} u(x) \leq \max_{\Omega} w(x) = \max_{\Gamma} w(x) \leq \max_{\Gamma} u(x) + \varepsilon \max_{\Gamma} e^{x_1} \leq \max_{\Gamma} u(x) + \varepsilon \max_{\Gamma} e^b,$$

再令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 即得  $\max_{\Omega} u(x) \leq \max_{\Gamma} u(x)$ 。又  $\max_{\Omega} u(x) \geq \max_{\Gamma} u(x)$ , 从而  $\max_{\Omega} u(x) = \max_{\Gamma} u(x)$ , 即(4.3)式成立。 □

定义:  $\Delta u \geq 0$ : 下调和;  $\Delta u = 0$ : 调和;  $\Delta u \leq 0$ : 上调和。

注: 上述的证明方法也适用于讨论一般二阶线性椭圆型方程的情形。



## §4 先验估计

## 1. 椭圆型方程解的最大模估计

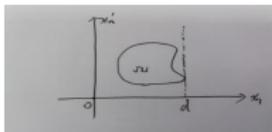
## 定理 4.2

设  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  是问题(4.1)的解, 则成立

$$\max_{\Omega} |u| \leq \Phi + CF, \quad (4.4)$$

其中  $\Phi = \max_{\Gamma} |\varphi(x)|$ ,  $F = \sup_{\Omega} |f(x)|$ , 而  $C$  是只依赖于  $n$  与  $\Omega$  的正常数。

证 因  $\Omega$  是有界区域, 不妨设  $\Omega$  位于带形区域  $0 < x_1 < d$  中, 如图



作辅助函数

$$v(x) = \Phi + (e^{ad} - e^{ax_1})F \left( \leq \Phi + (e^{ad} - 1)F \right) \quad (a > 1). \quad (4.5)$$

因  $a > 1 > 0$ , 则  $|f| \leq F < a^2 F$ , 于是在  $\Omega$  中



## §4 先验估计

## 1. 椭圆型方程解的最大模估计

$$\Delta(u - v) = \Delta u - \Delta v = f + a^2 e^{ax_1} F \leq 0, \quad (4.6)$$

而在边界  $\Gamma$  上

$$(u - v)|_{\Gamma} = [(u - \Phi) - (e^{ad} - e^{ax_1})F] \Big|_{\Gamma} \leq 0. \quad (4.7)$$

故由定理 4.1 知, 在  $\Omega$  内部也成立  $u - v \leq 0$ , 即  $u \leq v \leq \Phi + (e^{ad} - 1)F$ . 取  $C = e^{ad} - 1$ , 即得

$$\max_{\Omega} u \leq \Phi + CF.$$

因  $-u$  也满足(4.1), 且  $-f(x) \leq F, -\varphi(x) \leq \Phi$ , 故也有  $\max_{\Omega}(-u) \leq \Phi + CF$ . 于是(4.4)得证.  $\square$

推论: 设  $u_1, u_2$  是问题(4.1)对应于  $\varphi_1, \varphi_2, f_1, f_2$  的两解, 令  $u = u_1 - u_2$ , 则  $u$  满足

$$\begin{cases} \Delta u = f_1 - f_2 \triangleq f, \\ u|_{\Gamma} = \varphi_1 - \varphi_2 \triangleq \varphi, \end{cases}$$

则由定理 4.2 知

$$\|u\|_{C(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{C(\Gamma)} + \|f\|_{C(\Gamma)}.$$

显然稳定性成立. 若  $\varphi = f = 0$ , 由上式知  $u = 0$ , 即唯一性成立.



## §4 先验估计

## 2. 热传导方程解的最大模估计

设  $\Omega$  为有界区域, 具有光滑边界  $\Gamma$ ,  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ ,  $\Sigma_T = \{t = 0, x \in \Omega\} \cup \{x \in \Gamma, 0 \leq t \leq T\}$  (抛物边界)。

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = f(x, t), \\ u_{t=0} = \varphi(x), \\ u|_{\Gamma \times (0, T)} = g(x, t). \end{cases} \quad (4.8)$$

## 定理 4.3

设  $u \in C^2(Q_T) \cap C^1(\bar{Q}_T)$  是问题(4.8)的解, 则成立

$$\max_{Q_T} |u| \leq FT + B, \quad (4.9)$$

其中  $F = \sup_{Q_T} |f|$ ,  $B = \max\{\max_{x \in \Omega} |\varphi|, \max_{x \in \Gamma, 0 \leq t \leq T} |g|\}$ 。

推广的极值原理: 若  $w(x, t) \in C^2(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$ , 且在  $Q_T$  中满足

$$w_t - a^2 \Delta w \leq 0, \quad (4.10)$$

则  $w(x, t)$  的极大值必在  $Q_T$  的抛物边界  $\Sigma_T$  上达到。由第二章定理 4.1 的推论即可知。



## §4 先验估计

## 2. 热传导方程解的最大模估计

定理 4.3 的证明

令

$$w(x, t) = u(x, t) - Ft - B. \quad (4.11)$$

易见在  $Q_T$  中

$$w_t - a^2 \Delta w = f - F \leq 0.$$

又由  $B$  的选取知:  $w|_{\Sigma_T} = u|_{\Sigma_T} - B \leq 0$ , 所以由推广的极值原理知在  $Q_T$  中

$$w(x, t) \leq 0 \implies u(x, t) \leq Ft + B \leq FT + B,$$

从而

$$\max_{Q_T} u(x, t) \leq FT + B.$$

同理,  $\max_{Q_T}(-u)$  也被同样的上界控制, 故得(4.9)式。



## §4 先验估计

## 3. 双曲型方程解的能量估计

设  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  为有界区域, 具有光滑边界  $\Gamma$ ,  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ . 讨论一般形式得二阶线性双曲型方程的能量估计

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b_0(x,t) \frac{\partial u}{\partial t} + c(x,t)u = f(x,t). \quad (4.12)$$

作如下假设

(i)  $a_{ij} \in C^1(\bar{Q}_T)$  和  $b_i, b_0, c, f \in C(\bar{Q}_T)$ ;

(ii) (**严格双曲条件**)  $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = 1, \dots, n$ , 且  $\exists \alpha > 0$  使得对一切  $(x, t) \in \bar{Q}_T$  和任意给定的实向量  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ , 成立

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_i \xi_i^2 = \alpha |\xi|^2. \quad (4.13)$$

**说明:** 由于  $\bar{Q}_T$  是有界闭集, 因此由 (i) 知,  $a_{ij}, (a_{ij})_{x_i}, (a_{ij})_t, b_i, b_0, c, f$  在  $\bar{Q}_T$  中均有界. 令

$A = (a_{ij})_{n \times n}$ , 则由 (ii) 知, 矩阵  $A$  正定.



## §4 先验估计

## 3. 双曲型方程解的能量估计

现给定初始条件和边界条件

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x), & \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Omega, \\ u|_{\Sigma_T} = 0, \end{cases} \quad (4.14)$$

(4.15)

其中  $\Sigma_T = \Gamma \times (0, T)$  是区域  $Q_T$  的侧边界。

引入能量函数:

$$E(t) = \int_{\Omega} \left( u_t^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} \right) dx. \quad (4.16)$$

## 定理 4.4

若  $u(x, t)$  是初边值问题(4.12), (4.14)及(4.15)的解, 则成立能量估计式

$$E(t) \leq E(0)e^{Ct} + Ce^{Ct} \int_0^t \int_{\Omega} f^2 dx dt, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.17)$$

其中  $C$  为一个不依赖于  $u$  的常数。

证 将(4.12)两端同乘  $u_t$ , 并在  $\Omega$  上关于  $x$  积分, 得到

$$\int_{\Omega} \left( u_t u_{tt} - u_t \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + u_t \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + b_0 u_t^2 + c u u_t \right) dx = \int_{\Omega} u_t f dx. \quad (4.18)$$



## §4 先验估计

## 3. 双曲型方程解的能量估计

因  $\int_{\Omega} u_t u_{tt} dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} u_t^2 dx$ , 注意到  $u|_{\Sigma_T} = 0 \Rightarrow u_t|_{\Sigma_T} = 0$ . 又注意到格林公式

$$\int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} f \cdot \cos(\mathbf{n}, x_j) dx$$

在格林公式中  $h = u_t a_{ij} u_{x_i}$ , 然后再分部积分得

$$\int_{\Omega} u_{tx_j} a_{ij} u_{x_i} dx + \int_{\Omega} u_t (a_{ij})_{x_j} u_{x_i} dx + \int_{\Omega} u_t a_{ij} u_{x_i x_j} dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_t a_{ij} u_{x_i}) dx = \int_{\Gamma} u_t a_{ij} u_{x_i} \cos(\mathbf{n}, x_j) dx = 0,$$

而又知  $a_{ij}$  对称, 故

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{tx_j} u_{x_i} dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} [u_{tx_j} u_{x_i} + u_{tx_i} u_{x_j}] dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (u_{x_i} u_{x_j})_t dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_i} u_{x_j})_t dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij})_t u_{x_i} u_{x_j} dx, \end{aligned}$$

从而(4.18)化为

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j}) \right\} + \int_{\Omega} u_t (a_{ij})_{x_j} u_{x_i} dx \\ &- \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij})_t u_{x_i} u_{x_j} dx + \int_{\Omega} (u_t \sum_i b_i u_{x_i} + b_0 u_t^2 + cuu_t) = \int_{\Omega} u_t f dx. \end{aligned} \quad (4.19)$$



## §4 先验估计

## 3. 双曲型方程解的能量估计

简记为

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega} p(u, u_t, u_x) dx + \int_{\Omega} u_t f dx, \quad (4.20)$$

其中  $p(u, u_t, u_x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij})_t u_{x_i} u_{x_j} - u_t (a_{ij})_{x_j} u_{x_i} - \left( u_t \sum_i^n b_i u_{x_i} + b_0 u_t^2 + cuu_t \right)$ 。再由柯西不等式：  
 $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$  和假设 (i)，有

$$\left| \int_{\Omega} p(u, u_t, u_x) dx \right| \leq C_1 \int_{\Omega} \left( u^2 + u_t^2 + \sum_i^n u_{x_i}^2 \right) dx, \quad (4.21)$$

其中  $C_1$  为与  $u$  无关的正常数。 □

## 引理 4.1

设  $u = u(x)$  在有界区域  $\Omega$  上连续，且在边界上为零，则成立如下的弗里德克斯 (Friedrichs) 不等式：

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq C_0 \int_{\Omega} \sum_i^n u_{x_i}^2 dx, \quad (4.22)$$

其中  $C_0$  为与  $u$  无关的正常数。

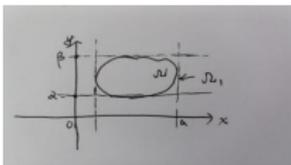
## §4 先验估计

## 3. 双曲型方程解的能量估计

证 不妨设  $n = 2$ ,  $\Omega$  在第一象限内, 则由  $\Omega$  的有界性可作矩形

$$\Omega_1 = \{0 \leq x \leq a, \alpha \leq y \leq \beta\} \supset \Omega,$$

并在  $\Omega_1 \setminus \Omega$  上  $u \equiv 0$ .



对于任意给定的一点  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \Omega_1$ , 则  $u(0, \bar{x}_2) = 0$ . 于是成立

$$u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \int_0^{\bar{x}_1} u_{x_1}(x_1, \bar{x}_2) dx_1 \leq \left( \int_0^{\bar{x}_1} u_{x_1}^2(x_1, \bar{x}_2) dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{\bar{x}_1} 1^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \int_0^{\bar{x}_1} u_{x_1}^2(x_1, \bar{x}_2) dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\bar{x}_1},$$

再利用施瓦茨 (Schwarz) 不等式:  $\int_a^b g \cdot h dx \leq \left( \int_a^b g^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b h^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$  知

$$u^2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \leq \bar{x}_1 \int_0^{\bar{x}_1} u_{x_1}^2(x_1, \bar{x}_2) dx_1 \leq a \int_0^a u_{x_1}^2(x_1, \bar{x}_2) dx_1.$$

将上式两端对  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  积分, 得  $\int_{\Omega_1} u^2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 \leq a^2 \int_{\Omega_1} u_{x_1}^2 d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 \leq a^2 \int_{\Omega_1} (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) d\bar{x}_1 d\bar{x}_2$ .



## §4 先验估计

## 3. 双曲型方程解的能量估计

因在  $\Omega$  外  $u \equiv 0$ , 故取  $C_0 = a^2$ , 就有  $\int_{\Omega_1} u^2 d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 \leq C_0 \int_{\Omega_1} (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) d\bar{x}_1 d\bar{x}_2$ . 引理证毕.  $\square$

利用(4.22), 并由(4.21)即有

$$\left| \int_{\Omega} p(u, u_t, u_x) dx \right| \leq C_1 \int_{\Omega} (u_t^2 + \sum_i^n u_{x_i}^2) dx. \quad (4.23)$$

又注意到

$$\left| \int_{\Omega} u_t f dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2 + f^2) dx, \quad (4.24)$$

综上可有

$$\frac{dE}{dt} \leq C(E(t) + \int_{\Omega} f^2 dx). \quad (4.25)$$

同样两端同乘以  $e^{-Ct}$  再对  $t$  积分, 即可得  $E(t) \leq E(0)e^{Ct} + Ce^{Ct} \int_0^t \int_{\Omega} f^2 dx dt$ . 定理得证.

注: 与波动方程相仿, 利用能量估计式(4.17)即可得初边值问题(4.12), (4.14)以及(4.15)的解的唯一性以及在同范数意义下解关于初值及右端项的稳定性。



## §4 先验估计

## 4. 抛物型方程解的能量估计

考察二阶抛物型方程

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + \sum_i b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u = f(x,t), \quad (4.26)$$

其中  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ , 对系数和方程右端项假设满足上一段的 (i)、(ii), 另外还给出如下的初始条件及边界条件

$$t = 0: u = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.27)$$

$$u|_{\Sigma_T} = 0. \quad (4.28)$$

## 定理 4.5

若  $u(x, t)$  是初边值问题(4.26)-(4.28)的解,  $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx$ , 则成立能量估计式

$$E(t) \leq E(0)e^{Ct} + e^{Ct} \int_0^t \int_{\Omega} f^2 dx dt, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.29)$$

其中  $C$  为一个不依赖于  $u$  的正常数。

**证** 对方程(4.26)两端乘以  $u$ , 然后在  $\Omega$  上关于  $x$  积分, 得到

$$\int_{\Omega} u \left( u_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + \sum_i b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u \right) = \int_{\Omega} f u dx. \quad (4.30)$$



## §4 先验估计

## 4. 抛物型方程解的能量估计

上式左端第一项可写为

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx \right\} = \frac{d}{dt} E(t);$$

第二项利用格林公式进行分部积分, 并注意到边界条件(4.28), 可写为

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j}^n (a_{ij})_{x_j} u u_{x_i} dx.$$

记  $\int_{\Omega} Q(u, u_x) dx = \int_{\Omega} \sum_{i,j}^n (a_{ij})_{x_j} u u_{x_i} dx - \int_{\Omega} \sum_i^n b_i u_{x_i} dx - \int_{\Omega} c u dx$ 。同样利用假设 (i) 可得, 对一切  $0 \leq t \leq T$  成立

$$\left| \int_{\Omega} Q(u, u_x) dx \right| \leq C_T \int_{\Omega} \left( \sum_i^n |u| |u_{x_i}| + u^2 \right) dx, \quad (4.31)$$

而对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 有

$$\int_{\Omega} \sum_i^n |u| |u_{x_i}| dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \sum_i^n |u_{x_i}|^2 dx + \frac{n}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |u|^2 dx, \quad (4.32)$$

取  $\varepsilon = \frac{\alpha}{2C_T}$ , 再由(4.31)可知

$$\left| \int_{\Omega} Q(u, u_x) dx \right| \leq \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \sum_i^n |u_{x_i}|^2 dx + C_1 \int_{\Omega} |u|^2 dx, \quad (4.33)$$

其中  $C_1 = \frac{nC_T^2}{2\alpha} + C_T$ 。将(4.33)代入(4.30), 易得



## §4 先验估计

## 4. 抛物型方程解的能量估计

$$\frac{dE}{dt} + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx \leq \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \sum_i |u_{x_i}|^2 dx + (C_1 + \frac{1}{2}) \int_{\Omega} u^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} f^2 dx. \quad (4.34)$$

再利用假设 (ii) 有

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx \geq \alpha \int_{\Omega} \sum_i |u_{x_i}|^2 dx, \quad (4.35)$$

从而得到

$$\frac{dE}{dt} \leq C_2 E(t) + \int_{\Omega} f^2 dx, \quad (4.36)$$

其中  $C_2 = 2C_1 + 1$ 。模仿双曲型方程能量不等式的推导，可由(4.36)推出(4.29)。证毕。

注：由定理 4.5 可推出双曲型方程初边值问题(4.26)–(4.28)的解的唯一性，以及在均方模意义下解关于初值与右端项的稳定性。

□



## §4 先验估计

## 5. 椭圆型方程解的能量估计

考察二阶椭圆型方程

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_i b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x). \quad (4.37)$$

与前面相仿, 假设:

- (i)  $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}_T)$  和  $b_i, c, f \in C(\bar{\Omega}_T)$ ;  
 (ii)  $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = 1, \dots, n$ , 且  $\exists \alpha > 0$  使得对一切  $x \in \bar{\Omega}_T$  和任意给定的实向量  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ , 成立

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_i \xi_i^2 = \alpha |\xi|^2. \quad (4.38)$$

边界条件为

$$u|_T = 0. \quad (4.39)$$

## 定理 4.6

存在一个仅依赖于区域  $\Omega, \alpha$  以及  $\left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right|, |b_i|(i, j = 1, \dots, n)$  的最大值的正常数  $\lambda_0$ , 在  $c(x) \leq -\lambda_0$  时, 椭圆型方程(4.37)及(4.39)的解  $u = u(x)$  满足

$$\int_{\Omega} \left( \sum_i^n |u_{x_i}|^2 + u^2 \right) dx \leq C \int_{\Omega} f^2 dx, \quad (4.40)$$

其中  $C$  为一个不依赖于  $n$  的正常数。

## §4 先验估计

## 5. 椭圆型方程解的能量估计

证 对方程(4.37)两端乘以  $u$ , 然后在  $\Omega$  上积分, 得

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} u + \sum_i b_i u_{x_i} u + cu^2 \right) dx = \int_{\Omega} f u dx. \quad (4.41)$$

将上式右端第一项利用格林公式进行分部积分, 并利用边界条件(4.39), 可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} u dx &= \int_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \cos(\mathbf{n}, x_j) u dS \\ &\quad - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} u_{x_i} u dx \\ &= - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} u_{x_i} u dx, \end{aligned} \quad (4.42)$$

于是(4.41)可改写为

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} - cu^2 \right) dx = I, \quad (4.43)$$

其中

$$I = - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} u_{x_i} u dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} u dx - \int_{\Omega} f u dx. \quad (4.44)$$



## §4 先验估计

## 5. 椭圆型方程解的能量估计

记

$$M = \max_i \max_{x \in \Omega} \left( \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right|, |b_i| \right), \quad (4.45)$$

则对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 有

$$\begin{aligned} I &\leq 2M \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}| |u| dx + \int_{\Omega} |f| |u| dx \\ &\leq 2M \left( \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx + \frac{n}{2\varepsilon} \int_{\Omega} u^2 dx \right) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^2 + f^2) dx \\ &= M\varepsilon \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx + \left( \frac{nM}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \right) \int_{\Omega} u^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} f^2 dx. \end{aligned}$$

取  $\varepsilon = \frac{\alpha}{2M}$ , 则由(4.43)以及假设(4.38)可得

$$\alpha \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx - \int_{\Omega} cu^2 dx \leq \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx + \left( \frac{2nM^2}{\alpha} + \frac{1}{2} \right) \int_{\Omega} u^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} f^2 dx. \quad (4.46)$$

令  $\lambda_0 = \frac{2nM^2}{\alpha} + \frac{1}{2}$ , 则当  $c \leq -\lambda_0$  时就有

$$\frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx \leq C \int_{\Omega} f^2 dx. \quad (4.47)$$

最后利用边界条件(4.39)以及弗里德里不等式(4.22), 成立  $\int_{\Omega} (\sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 + u^2) dx \leq C \int_{\Omega} f^2 dx$ . 证毕。



## §4 先验估计

## 5. 椭圆型方程解的能量估计

注：与双曲型、抛物型方程相仿，能量估计式(4.40)可导致椭圆型方程狄利克雷问题解的唯一性以及在其均方模意义下对右端项的连续依赖性。

注：值得强调的是，在定理 4.6 中  $c(x) \leq -\lambda_0$  的条件是重要的。当这个条件不成立时，能量估计式以及解的唯一性与稳定性都可能不成立。

反例：设  $\Omega$  为平面上的矩形区域  $[0, \pi; 0, \pi]$ ，在  $\Omega$  上考察下列椭圆型方程的第一边值问题：

$$\Delta u + cu = f, \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \quad (4.48)$$

$$u|_r = 0. \quad (4.49)$$

易证，当  $c = 2n^2$  时，相应的齐次问题除零解外，还有非零解  $u = \sin nx \sin ny$ ，即唯一性不成立。相应地，(4.40)形式的能量估计式也不可能成立。

